Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana

Coleção Professor de Matemática

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073 / 2529-5095
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-85818-84-5

MUNIZ NETO, Antonio Caminha.

Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana/ Caminha Muniz Neto.

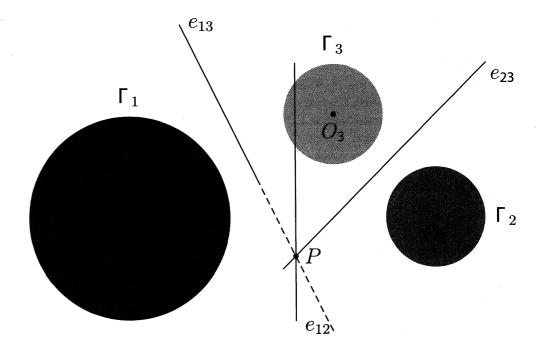
-2.ed. -- Rio de Janeiro: SBM, 2013.

v.2 ;464 p. (Coleção Professor de Matemática; 25)

ISBN 978-85-85818-84-5

1. Conceitos Geométricos Básicos. 2. Congruência de Triângulos.
3. Lugares Geométricos. 4. Proporcionalidade e semelhança.
I. Título.

Tópicos de Matemática Elementar
Volume 2
Geometria Euclidiana Plana

Antonio Caminha Muniz Neto

2ª edição
2013
Rio de Janeiro

Nº P
Cód

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 1 - Números Reais* - A. Caminha
- Tópicos de Matemática *Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 - Introdução à Análise* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória* - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 5 - Teoria dos Números* - A. Caminha

Para meus estudantes

Sumário

Prefácio

Esta coleção evoluiu a partir de sessões de treinamento para olimpíadas de Matemática, por mim ministradas para alunos e professores do Ensino Médio, várias vezes ao longo dos anos de 1992 a 2003 e, mais recentemente, como orientador do Programa de Iniciação Científica para os premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Projeto Amílcar Cabral de cooperação educacional entre Brasil e Cabo Verde.

Idealmente, planejei o texto como uma mistura entre uma iniciação suave e essencialmente autocontida ao fascinante mundo das competições de Matemátia, além de uma bibliografia auxiliar aos estudantes e professores do secundário interessados em aprofundar seus conhecimentos matemáticos. Resumidamente, seu propósito primordial é apresentar ao leitor uma abordagem de quase todos os conteúdos geralmente constantes dos currículos do secundário, e que seja ao mesmo tempo concisa, não excessivamente tersa, logicamente estruturada e mais aprofundada que a usual.

Na estruturação dos livros, me ative à máxima do eminente matemático húngaro-americano George Pólya, que dizia não se poder

fazer Matemática sem *sujar as mãos*. Assim sendo, em vários pontos deixei a cargo do leitor a tarefa de verificar aspectos não centrais aos desenvolvimentos principais, quer na forma de detalhes omitidos em demonstrações, quer na de extensões secundárias da teoria. Nestes casos, frequentemente referi o leitor a problemas específicos, os quais se encontram marcados com * e cuja análise e solução considero parte integrante e essencial do texto. Colecionei ainda, em cada seção, outros tantos problemas, cuidadosamente escolhidos na direção de exercitar os resultados principais elencados ao longo da discussão, bem como estendê-los. Uns poucos destes problemas são quase imediatos, ao passo que a maioria, para os quais via de regra oferto sugestões ou soluções completas, é razoavelmente difícil; no entanto, insto veementemente o leitor a debruçar-se sobre o maior número possível deles por tempo suficiente para, ainda que não os resolva todos, passar a apreciá-los como corpo de conhecimento adquirido.

O primeiro volume discorre sobre vários aspectos relevantes do conjunto dos números reais e de álgebra elementar, no intuito de munir o leitor dos requisitos necessários ao estudo dos tópicos constantes dos volumes subsequentes. Após começar com uma discussão não axiomática das propriedades mais elementares dos números reais, são abordados, em seguida, produtos notáveis, equações e sistemas de equações, sequências elementares, indução matemática e números binomiais; o texto finda com a discussão de várias desigualdades algébricas importantes, notadamente aquela entre as médias aritmética e geométrica, bem como as desigualdades de Cauchy, de Chebyshev e de Abel.

Dedicamos o segundo volume a uma iniciação do leitor à geometria Euclidiana plana, inicialmente de forma não axiomática e enfatizando construções geométricas elementares. Entretanto, à medida em que o texto evolui, o método sintético de Euclides – e, consequentemente, demonstrações – ganha importância, principalmente com a discussão dos conceitos de congruência e semelhança de triângulos; a partir desse ponto, vários belos teoremas clássicos da geometria, usualmente

ausentes dos livros-texto do secundário, fazem sua aparição. Numa terceira etapa, o texto apresenta outros métodos elementares usuais no estudo da geometria, quais sejam, o método analítico de R. Descartes, a trigonometria e o uso de vetores; por sua vez, tais métodos são utilizados tanto para reobter resultados anteriores de outra(s) maneira(s) quanto para deduzir novos resultados.

De posse do traquejo algébrico construído no volume inicial e do aparato geométrico do volume dois, discorremos no volume três sobre aspectos elementares de funções e certos excertos de cálculo diferencial e integral e análise matemática, os quais se fazem necessários em certos pontos dos três volumes restantes. Prescindindo, inicialmente, das noções básicas do Cálculo, elaboramos, dentre outros, as noções de gráfico, monotonicidade e extremos de funções, bem como examinamos o problema da determinação de funções definidas implicitamente por relações algébricas. Na continuação, o conceito de função contínua é apresentado, primeiramente de forma intuitiva e, em seguida, axiomática, sendo demonstrados os principais resultados pertinentes. Em especial, utilizamos este conceito para estudar a convexidade de gráficos – culminando com a demonstração da desigualdade de J. Jensen – e o problema da definição rigorosa da área sob o gráfico de uma função contínua e positiva – que, por sua vez, possibilita a apresentação de uma construção adequada das funções logaritmo natural e exponencial. O volume três termina com uma discussão das propriedades mais elementares de derivadas e do teorema fundamental do cálculo, os quais são mais uma vez aplicados ao estudo de desigualdades, em especial da desigualdade entre as médias de potências.

O volume quatro é devotado à análise combinatória. Começamos revisando as técnicas mais elementares de contagem, enfatizando as construções de bijeções e argumentos recursivos como estratégias básicas. Na continuação, apresentamos um apanhado de métodos de contagem um tanto mais sofisticados, como o princípio da inclusão

exclusão e os métodos de contagem dupla, do número de classes de equivalência e mediante o emprego de métricas em conjuntos finitos. A cena é então ocupada por funções geradoras, onde a teoria elementar de séries de potências nos permite discutir de outra maneira problemas antigos e introduzir problemas novos, antes inacessíveis. Terminada nossa excursão pelo mundo da contagem, enveredamos pelo estudo do problema da existência de uma configuração especial no universo das configurações possíveis, utilizando para tanto o princípio das gavetas de G. L. Dirichlet – vulgo "princípio das casas dos pombos" –, um célebre teorema de R. Dilworth e a procura e análise de invariantes associados a problemas algorítmicos. A última estrutura combinatória que discutimos é a de um grafo, quando apresentamos os conceitos básicos usuais da teoria com vistas à discussão de três teoremas clássicos importantes: a caracterização da existência de caminhos Eulerianos, o teorema de A. Cayley sobre o número de árvores rotuladas e o teorema extremal de P. Turán sobre a existência de subgrafos completos em um grafo.

Passamos em seguida, no quinto volume, à discussão dos conceitos e resultados mais elementares de teoria dos números, ressaltando-se inicialmente a teoria básica do máximo divisor comum e o teorema fundamental da aritmética. Discutimos também o método da descida de P. de Fermat como ferramenta para provar a inexistência de soluções inteiras para certas equações diofantinas, e resolvemos também a famosa equação de J. Pell. Em seguida, preparamos o terreno para a discussão do famoso teorema de Euler sobre congruências, construindo a igualmente famosa função de Euler com o auxílio da teoria mais geral de funções aritméticas multiplicativas. A partir daí, o livro apresenta formalmente o conceito de congruência de números em relação a um certo módulo, discutindo extensivamente os resultados usualmente constantes dos cursos introdutórios sobre o assunto, incluindo raízes primitivas, resíduos quadráticos e o teorema de Fermat de caracterização dos inteiros que podem ser escritos como soma de

dois quadrados. O grande diferencial aqui, do nosso ponto de vista, é o calibre dos exemplos discutidos e dos problemas propostos ao longo do texto, boa parte dos quais oriundos de variadas competições ao redor do mundo.

Finalmente, números complexos e polinômios são os objetos de estudo do sexto e último volume da coleção. Para além da teoria correspondente usualmente estudada no secundário, vários são os tópicos não padrão abordados aqui. Dentre outros, destacamos inicialmente a utilização de números complexos e polinômios como ferramentas de contagem e a apresentação quase completa de uma das mais simples demonstrações do teorema fundamental da álgebra. A seguir, estudamos o famoso teorema de I. Newton sobre polinômios simétricos e as igualmente famosas desigualdades de Newton, as quais estendem a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. O próximo tema concerne os aspectos básicos da teoria de interpolação de polinômios, quando dispensamos especial atenção aos polinômios interpoladores de J. L. Lagrange. Estes, por sua vez, são utilizados para resolver sistemas lineares de Vandermonde sem o recurso à álgebra linear, os quais, a seu turno, possibilitam o estudo de uma classe particular de sequências recorrentes lineares. O livro termina com o estudo das propriedades de fatoração de polinômios com coeficientes inteiros, racionais ou pertencentes ao conjunto das classes de congruência relativas a algum módulo primo, seguido do estudo do conceito de número algébrico. Há, aqui, dois pontos culminantes: por um lado, uma prova mais simples do fechamento do conjunto dos números algébricos em relação às operações aritméticas básicas; por outro, o emprego de polinômios ciclotômicos para provar um caso particular do teorema de Dirichlet sobre primos em progressões aritméticas.

Várias pessoas contribuíram ao longo dos anos, direta ou indiretamente, para que um punhado de anotações em cadernos pudesse transformar-se nesta coleção de livros. Os ex-professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Marcondes

Cavalcante França, João Marques Pereira, Guilherme Lincoln Aguiar Ellery e Raimundo Thompson Gonçalves, ao criarem a Olimpíada Cearense de Matemática na década de 1980, motivaram centenas de jovens cearenses, dentre os quais eu me encontrava, a estudarem mais Matemática. Meu ex-professor do Colégio Militar de Fortaleza, Antônio Valdenísio Bezerra, ao convidar-me, inicialmente para assistir a suas aulas de treinamento para a Olimpíada Cearense de Matemática e posteriormente para dar aulas consigo, iniciou-me no maravilhoso mundo das competições de Matemática e influenciou definitivamente minha escolha profissional. Os comentários de muitos de vários de ex-alunos contribuíram muito para o formato final de boa parte do material aqui colecionado; nesse sentido, agradeço especialmente a João Luiz de Alencar Araripe Falcão, Roney Rodger Sales de Castro, Marcelo Mendes de Oliveira, Marcondes Cavalcante França Jr., Marcelo Cruz de Souza, Eduardo Cabral Balreira, Breno de Alencar Araripe Falcão, Fabrício Siqueira Benevides, Rui Facundo Vigelis, Daniel Pinheiro Sobreira, Antônia Taline de Souza Mendonça, Carlos Augusto David Ribeiro, Samuel Barbosa Feitosa, Davi Máximo Alexandrino Nogueira e Yuri Gomes Lima. Vários de meus colegas professores teceram comentários pertinentes, os quais foram incorporados ao texto de uma ou outra maneira; agradeço, em especial, a Fláudio José Gonçalves, Francisco José da Silva Jr., Onofre Campos da Silva Farias, Emanuel Augusto de Souza Carneiro, Marcelo Mendes de Oliveira, Samuel Barbosa Feitosa e Francisco Bruno de Lima Holanda. Os professores João Lucas Barbosa e Hélio Barros deram-me a conclusão de parte destas notas como alvo a perseguir ao me convidarem a participar do Projeto Amílcar Cabral de treinamento dos professores de Matemática da República do Cabo Verde. Meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Abdênago Alves de Barros, José Othon Dantas Lopes, José Robério Rogério e Fernanda Esther Camillo Camargo, bem como meu orientando de iniciação científica Itamar Sales de Oliveira Filho,

leram partes do texto final e ofereceram várias sugestões. Os pareceristas indicados pela SBM opinaram decisivamente para que os livros certamente resultassem melhores que a versão inicial por mim submetida. O presidente da SBM, professor Hilário Alencar da Silva, o antigo editor-chefe da SBM, professor Roberto Imbuzeiro de Oliveira, bem como o novo editor-chefe, professor Abramo Hefez, foram sempre extremamente solícitos e atenciosos comigo ao longo de todo o processo de edição. O sr. Tiago Rocha, assistente editorial da SBM, foi de fundamental importância em todo o processo, tendo contribuído em muito para a formato gráfico final da obra.

Por fim e principalmente, gostaria de agradecer a meus pais, Antonio Caminha Muniz Filho e Rosemary Carvalho Caminha Muniz, e à minha esposa Mônica Valesca Mota Caminha Muniz. Meus pais me fizeram compreender a importância do conhecimento desde a mais tenra idade, sem nunca terem medido esforços para que eu e meus irmãos desfrutássemos o melhor ensino disponível; minha esposa brindou-me com a harmonia e o incentivo necessários à manutenção de meu ânimo e humor, em longos meses de trabalho solitário nas madrugadas. Esta coleção de livros também é dedicada a eles.

FORTALEZA, JANEIRO de 2012

Antonio Caminha M. Neto

Prefácio à 2ª edição

Para a segunda edição fiz uma extensa revisão do texto e dos problemas propostos, corrigindo várias imprecisões de língua portuguesa e de Matemática. Diferentemente da primeira edição, nesta segunda edição as sugestões e soluções aos problemas propostos foram colecionadas em um capítulo separado (o capítulo 9, para este volume); adicionalmente, apresentei sugestões ou soluções a praticamente todos os problemas do livro e, notadamente, a todos aqueles com algum grau apreciável de dificuldade. Especificamente para este volume, a seção 5.3 foi consideravelmente ampliada, com vistas a definir e calcular de maneira mais adequada a circunferência de um círculo.

Gostaria de agradecer à comunidade matemática brasileira, em geral, e a todos os leitores que me enviaram sugestões ou correções, em particular, o excelente acolhimento da primeira edição desta obra.

FORTALEZA, JANEIRO de 2013

CAPÍTULO 1

Conceitos Geométricos Básicos

Este livro é devotado ao estudo da Geometria *Euclidiana*, assim adjetivada após a famosa obra *Elementos* ([8]), de Euclides de Alexandria[1].

Pautaremos nossa discussão, o mais possível, pelo utilização do método lógico-dedutivo, sem ter, no entanto, a preocupação de listar um conjunto exaustivo de postulados a partir dos quais possamos construir axiomaticamente[2] a geometria. Para o cumprimento de um tal

[1]Euclides de Alexandria, matemático grego dos séculos IV e III a.C. e um dos mais importantes da antiguidade. A maior de todas as contribuições de Euclides à Matemática, bem como à ciência em geral, foi o tratado *Elementos*, obra na qual expôs sistematicamente os conhecimentos de Geometria de seu tempo – doravante rotulada como *Euclidiana*. A importância dos *Elementos* se deve ao fato deste ser o primeiro livro em que se considera um corpo de conhecimento matemático como parte de um sistema lógico-dedutivo bem definido.

[2]Um *axioma* ou *postulado* é uma propriedade imposta como verdadeira. A utilização do *método axiomático* é uma das características fundamentais da Matemática como ciência.

Figura 1.1: Euclides de Alexandria, matemático grego dos séculos IV e III a.C. e um dos mais importantes da antiguidade. A maior de todas as contribuições de Euclides à Matemática, bem como à ciência em geral, foi o tratado *Elementos*, obra na qual expôs, sistematicamente, os conhecimentos de Geometria Plana de seu tempo – doravante rotulada como *Euclidiana* –, alguns dos quais frutos de seu próprio trabalho. A importância dos *Elementos* se deve ao fato deste ser a primeira obra em que se considera um corpo de conhecimento matemático como parte de um sistema lógico dedutivo bem definido.

programa, referimos o leitor a [3]. Para além do que apresentaremos aqui, sugerimos as referências [1], [6], [10], [11], [15], [16], [17] ou [18].

Apresentamos, neste capítulo, os conceitos e resultados mais básicos envolvidos na construção da Geometria Euclidiana *em um plano*.

1.1 Introdução

O leitor certamente tem uma boa ideia, a partir da experiência diária, do que vem a ser um **ponto**, uma **reta** ou um **plano**. Portanto, vamos assumir essas noções como **conceitos primitivos**, i.e., tais que

prescindem de definições formais. Assumiremos, ainda, que toda reta é um conjunto de (pelo menos dois) pontos[3].

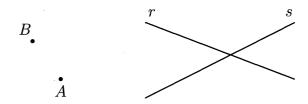



Figura 1.2: pontos e retas no plano.

Na figura 1.2, temos os pontos A e B e as retas r e s (em geral, denotaremos pontos por letras latinas maiúsculas e retas por letras latinas minúsculas). Grosso modo, podemos dizer que a Geometria Euclidiana Plana estuda propriedades relativas aos pontos e retas de um plano.

A discussão a seguir servirá de base para o desenvolvimento da teoria. Ao longo da mesma, as afirmações enunciadas sem demonstrações deverão ser tomadas como axiomas.

Dados, no plano, um ponto P e uma reta r, só há duas possibilidades: ou o ponto P pertence à reta r ou não; no primeiro caso, escrevemos $P \in r$ (lê-se P *pertence* a r) e, no segundo, escrevemos $P \notin r$ (lê-se P *não pertence* a r). Na figura 1.3, temos $A \in r$ e $B \notin r$.

Neste momento, é natural nos perguntarmos sobre quantas retas podem ser traçadas por dois pontos dados. Assumiremos que podemos traçar *exatamente uma* tal reta. Em resumo, *por dois pontos distintos A e B do plano, podemos traçar uma única reta* (cf. figura 1.4). Nesse caso, sendo r a reta determinada por tais pontos, denotamos, alternativamente, $r = \overleftrightarrow{AB}$.

[3]Implicitamente, assumimos também que o plano contém todos os pontos e que há pelo menos três pontos não situados em uma mesma reta.

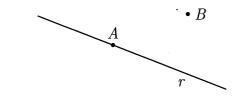



Figura 1.3: posições relativas de ponto e reta.

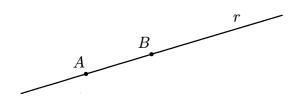



Figura 1.4: dois pontos determinam uma única reta.

Um ponto A, situado sobre uma reta r, a divide em dois *pedaços*, quais sejam, as **semirretas** de origem A. Escolhendo pontos B e C sobre r, um em cada um de tais pedaços, podemos denotar as semirretas de origem A por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Na figura 1.5, mostramos a porção da reta r correspondente à semirreta $\overrightarrow{AB}$ (a porção correspondente à semirreta $\overrightarrow{AC}$ foi apagada).

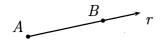



Figura 1.5: semirreta $\overrightarrow{AB}$ de origem A.

Dados pontos distintos A e B sobre uma reta r, o **segmento** AB é

a porção da reta r situada *de A a B*. Escrevemos $\overline{AB}$ para denotar o comprimento do segmento AB (que, a menos que se diga o contrário, será medido em centímetros). Para decidir se dois segmentos dados no plano são *iguais* (i.e., se têm comprimentos iguais) ou, caso contrário, qual deles é o maior, podemos usar um compasso, *transportando* um dos segmentos para a reta determinada pelo outro:

Exemplo 1.1. [4] Com o uso de um compasso, transporte o segmento AB para a reta $\overleftrightarrow{CD}$ e decida se $\overline{AB} > \overline{CD}$ ou vice-versa.

Solução.

B

D

C

A

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Centre o compasso em A e fixe a outra extremidade do mesmo em B.

2. Mantendo a abertura calibrada no item 1., centre o compasso em C e marque, com a outra extremidade do mesmo, um ponto E sobre a semirreta $\overrightarrow{CD}$, tal que $\overline{CE} = \overline{AB}$.

[4] Esse é o primeiro de uma série de exemplos que objetivam desenvolver no leitor uma relativa habilidade no manuseio da régua e do compasso. Em cada um de tais exemplos, apresentamos uma sequência de passos que, uma vez seguida, executa a construção correspondente. Após ler com atenção cada um de tais exemplos, sugerimos ao leitor que execute, ele mesmo, a construção discutida. Observamos, por fim, que uma construção geométrica **não constitui** prova de uma propriedade geométrica, uma vez que, necessariamente, envolve escolhas particulares e erros de precisão.

3. Compare os comprimentos dos segmentos $\overline{AB} = \overline{CE}$ e $\overline{CD}$.

■

Também podemos usar um compasso para adicionar segmentos e para multiplicar um segmento por um natural, conforme ensina o próximo exemplo.

Exemplo 1.2. Dados, no plano, os segmentos AB e CD como abaixo, construa com régua e compasso segmentos EF e GH, tais que $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$ e $\overline{GH} = 3\overline{AB}$.

Solução.

C
B

A D

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Com o auxílio de uma régua, trace uma reta r.
2. Marque sobre a reta r um ponto X e, em seguida, transporte o segmento AB para r, obtendo um segmento EX, tal que $\overline{EX} = \overline{AB}$.
3. Transporte o segmento CD para r, a partir do ponto X, obtendo um ponto F, tal que $\overline{XF} = \overline{CD}$ e $X \in EF$.
4. Perfaça uma cadeia análoga de passos para construir um segmento GH como pedido (observe que $3\overline{AB} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB}$).

■

Uma última observação sobre segmentos: dados os pontos A e B no plano, definimos a **distância** $d(A, B)$ entre os mesmos como o comprimento $\overline{AB}$ do segmento AB:

$$d(A, B) = \overline{AB}.$$

Além de pontos, retas, semirretas e segmentos, *círculos* serão objetos de grande importância em nosso estudo de Geometria Euclidiana plana. Precisamente, dados um ponto O e um real $r > 0$ (que deve ser pensado como o comprimento de um segmento), o **círculo** de **centro** O e **raio** r é o conjunto dos pontos P do plano que estão à distância r de O, i.e., tais que $\overline{OP} = r$:

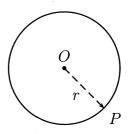



Figura 1.6: o círculo de centro O e raio r.

De uma maneira mais concreta, o círculo de centro O e raio r é a *curva plana* obtida quando posicionamos a ponta de um compasso no ponto O e fixamos sua abertura como igual ao comprimento r. O complemento de um círculo no plano consiste de duas regiões, uma *limitada*, que denominamos seu **interior** e a outra *ilimitada*, denominada o **exterior** do círculo. Alternativamente, o interior do círculo de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano cuja distância ao centro O é *menor* que r, i.e., tais que $\overline{OP} < r$ (figura 1.7); analogamente, o exterior do círculo é o conjunto dos pontos P do plano cuja distância ao centro O é *maior* que r, i.e., tais que $\overline{OP} > r$.

Via de regra, denotaremos círculos por letras gregas maiúsculas. Por exemplo, denotamos o círculo da figura 1.8 a seguir por Γ (lê-se

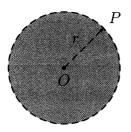



Figura 1.7: interior do círculo de centro O e raio r.

gama), e podemos mesmo escrever $\Gamma(O; r)$, caso queiramos enfatizar que o centro de Γ é O e o raio é r.

Dado um círculo Γ de centro O e raio r (figura 1.8), também denominamos **raio** do mesmo a todo segmento que une o centro O a um de seus pontos; por exemplo, OA, OB e OP são raios do círculo Γ. Uma **corda** de Γ é um segmento que une dois pontos quaisquer do círculo; um **diâmetro** de Γ é uma corda que passa por seu centro. Nas notações da figura 1.8, AB e CD são cordas de Γ, sendo AB um diâmetro. Todo diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais, denominadas **semicírculos**; reciprocamente, se uma corda de um círculo o divide em duas partes iguais, então tal corda deve, necessariamente, ser um diâmetro do círculo.

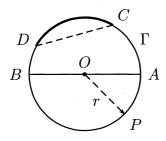



Figura 1.8: elementos de um círculo.

Ainda em relação à figura 1.8, o leitor deve ter notado que uma porção do círculo Γ aparece em negrito. Tal porção corresponde a um **arco** de círculo, i.e., a uma porção de um círculo delimitada por dois de seus pontos. Note que há uma certa ambiguidade nessa definição, devido ao fato de que dois pontos sobre um círculo determinam *dois* arcos. Em geral, resolveremos essa situação nos referindo ao **arco menor** ou ao **arco maior** $\overset{\frown}{CD}$. Desse modo, diremos que a porção do círculo Γ em negrito na figura 1.8 é o arco menor $\overset{\frown}{CD}$. Outra possibilidade é escolhermos mais um ponto sobre o arco a que desejamos nos referir, denotando o arco com o auxílio desse ponto extra; na figura 1.8, por exemplo, poderíamos escrever $\overset{\frown}{CPD}$ para denotar o arco maior $\overset{\frown}{CD}$.

Exemplo 1.3. Construa com um compasso o círculo de centro O e passando pelo ponto A. Em seguida, marque sobre o mesmo todos os possíveis pontos B para os quais a corda AB tenha o comprimento l dado.

Solução.

A

l $\quad$ O

Descrição dos passos.

1. Centre o compasso em O e fixe sua abertura de O a A. Em seguida, trace o círculo pedido.

2. Trace, de maneira análoga, o círculo de centro A e raio igual a l.

3. As possíveis posições do ponto B são os pontos de interseção dos dois círculos traçados.

■

Problemas – Seção 1.1

1. Sejam A, B, C e D pontos sobre uma reta r. Quantas são as semirretas contidas na reta r e tendo por origem um de tais pontos?

2. Os pontos A, B e C estão todos situados sobre uma mesma reta r, com $C \in AB$. Se $\overline{AB} = 10$cm e $\overline{AC} = 4\overline{BC}$, calcule $\overline{AC}$.

3. Sejam A, B, C e D pontos de uma reta r, tais que $D \in \overrightarrow{AC}$, $B \in \overrightarrow{DC}$ e $\overline{AC} = \overline{BD}$. Prove que $\overline{AB} = \overline{CD}$.

4. Sobre uma reta r estão marcados três pontos A, B e C, tais que B está entre A e C, $\overline{AB} = 3$cm e $\overline{AC} = 5,5$cm. Usando somente um compasso, marque sobre r um ponto D entre A e B, tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$.

5. Marque no plano, com o auxílio de uma régua e compasso, três pontos A, B e C tais que $\overline{AB} = 5$cm, $\overline{AC} = 6$cm e $\overline{BC} = 4$cm.

1.2 Ângulos

Comecemos esta seção com nossa primeira definição formal, que encontrará utilidade em outras situações.

Definição 1.4. Uma região $\mathcal{R}$ do plano é **convexa** quando, para todos os pontos $A, B \in \mathcal{R}$, tivermos $AB \subset \mathcal{R}$. Caso contrário, diremos que $\mathcal{R}$ é uma região **não convexa**.

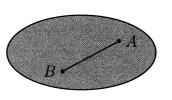
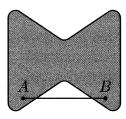



Figura 1.9: regiões convexa (esq.) e não convexa (dir.).

De acordo com a definição acima, para uma região $\mathcal{R}$ ser não convexa basta que existam pontos $A, B \in \mathcal{R}$ tais que pelo menos um ponto do segmento AB não pertença a $\mathcal{R}$.

Uma reta r de um plano o divide em duas regiões convexas, os **semiplanos** delimitados por r. Dados pontos A e B, um em cada um dos semiplanos em que r divide o plano, tem-se sempre $AB \cap r \neq \emptyset$ (figura 1.10).

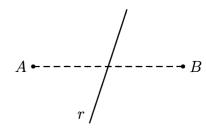



Figura 1.10: semiplanos determinados por uma reta.

Definição 1.5. Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um **ângulo** (ou **região angular**) de **vértice** O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

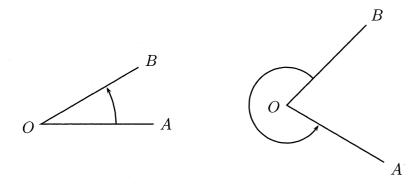



Figura 1.11: regiões angulares no plano

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo; na figura acima, o ângulo da esquerda é convexo, ao passo que o da direita é não convexo. Denotamos um ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ escrevendo $\angle AOB$; o contexto deixará claro se estamos nos referindo ao ângulo convexo ou ao não convexo.

Nosso objetivo, agora, é associar a todo ângulo uma medida da região do plano que ele ocupa. Para tanto (figura 1.12), divida um círculo Γ de centro O em 360 arcos iguais e tome pontos X e Y, extremos de um desses 360 arcos iguais. Dizemos que a *medida* do ângulo $\angle XOY$ é de 1 **grau**, denotado 1°, e escrevemos

$$X\widehat{O}Y = 1^\circ.$$

Há um pequeno problema com a definição de grau dada acima. Como podemos saber que ela não depende do círculo escolhido? De outro modo, como podemos saber se, dividindo outro círculo Σ (lê-se *sigma*), de centro O, em 360 partes iguais, obteremos um ângulo

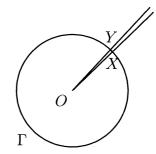



Figura 1.12: grau como unidade de medida de ângulos.

$\angle X'OY'$ o qual podemos dizer também medir 1°? Para responder essa pergunta, considere a figura 1.13. Nela, temos dois círculos Γ e Σ, de

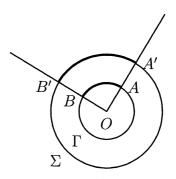



Figura 1.13: boa definição da noção de grau.

mesmo centro O, e dois pontos $A, B \in \Gamma$. Sejam A' e B' os pontos de interseção das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ com Σ. Assumimos como *axioma* que a fração de Γ que o arco menor $\overset{\frown}{AB}$ representa é igual à fração de Σ que o arco menor $\overset{\frown}{A'B'}$ representa. Portanto, se, na definição de grau, tivéssemos tomado um círculo Σ, de raio diferente do raio de Γ

mas com mesmo centro O, teríamos um mesmo ângulo representando a medida de $1°$.

A partir da definição de grau, é imediato que um círculo completo corresponde a $360°$. Por outro lado, dado um ângulo $\angle AOB$, permanece a pergunta de como podemos medi-lo. Para responder à mesma, fazemos a seguinte construção: traçamos um círculo qualquer Γ, de centro O, e marcamos os pontos A' e B' em que Γ intersecta os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de $\angle AOB$ (figura 1.14); em seguida, vemos qual fração do comprimento total de Γ o arco $\overset{\frown}{A'B'}$ representa. A medida $A\widehat{O}B$ do ângulo $\angle AOB$ será essa fração de $360°$. Por exemplo, se o

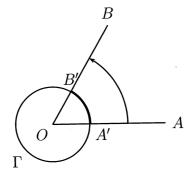



Figura 1.14: medindo o ângulo $\angle AOB$.

comprimento do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ for $\frac{1}{6}$ do comprimento total de Γ, então a medida de $\angle AOB$ será

$$A\widehat{O}B = \frac{1}{6} \cdot 360° = 60°.$$

Observações 1.6.

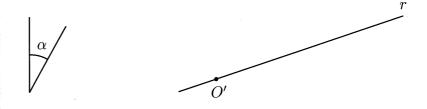
i. Diremos que dois ângulos são **iguais** se suas medidas forem iguais.

ii. A fim de evitar confusões, usaremos sistematicamente notações diferentes para um ângulo e para sua medida em graus.

iii. Muitas vezes usamos, por economia de notação, letras gregas minúsculas para denotar medidas de ângulos[5]; por exemplo, escrevemos $A\widehat{O}B = \theta$ (lê-se *téta*) para significar que a medida do ângulo $\angle AOB$ é θ graus.

Exemplo 1.7. Com o auxílio de um compasso, construa um ângulo de vértice O', com um lado situado sobre a reta r e igual ao ângulo α dado.

Solução.

■

Os passos a seguir serão justificados quando estudarmos o caso LLL de congruência de triângulos, na seção 2.1.

Descrição dos passos.

1. Trace um arco de círculo de raio arbitrário R, centrado no vértice do ângulo dado, marcando pontos X e Y sobre os lados do mesmo.

2. Trace outro arco de círculo de raio R, centrado em O', marcando Y' como um dos pontos de interseção do mesmo com a reta r.

3. Marque o ponto X' de interseção do círculo de raio R e centro O' com o círculo de raio $\overline{XY}$ e centro Y'.

[5]A exceção é a letra π (lê-se *pi*); por razões que ficarão claras posteriormente, reservamos outro uso para tal letra.

4. O ângulo $\angle X'O'Y'$ mede α.

Observamos, anteriormente, que todo diâmetro de uma círculo o divide em duas partes iguais. Assim, se tivermos um ângulo $\angle AOB$ tal que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ sejam semirretas opostas (i.e., A, O e B estejam sobre uma mesma reta, com $O \in AB$), então $A\widehat{O}B = 180°$ (figura 1.15).

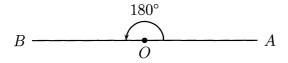



Figura 1.15: ângulo de 180°.

Raras vezes utilizaremos ângulos maiores que 180°. Assim, no que segue, quando escrevermos $\angle AOB$, estaremos nos referindo, a menos que se diga o contrário, ao ângulo *convexo* $\angle AOB$, i.e., ao ângulo $\angle AOB$ tal que $0° < A\widehat{O}B \leq 180°$. Diremos (figura 1.16) que um ângulo $\angle AOB$ é **agudo** quando $0° < A\widehat{O}B < 90°$, **reto** quando $A\widehat{O}B = 90°$ e **obtuso** quando $90° < A\widehat{O}B < 180°$. Observe, na (figura 1.16), a notação especial utilizada para ângulos retos.

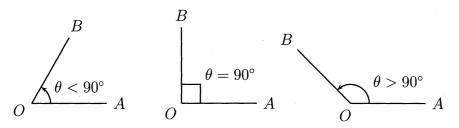



Figura 1.16: ângulos agudo (esq.), reto (centro) e obtuso (dir.).

É, por vezes, útil ter um nome especial associado a dois ângulos cuja soma das medidas seja igual a 90°; diremos, doravante, que dois ângulos com tal propriedade são **complementares**. Assim, se α e β

são as medidas de dois ângulos complementares, então $\alpha + \beta = 90°$. Ainda nesse caso, diremos que α é o **complemento** de β e vice-versa. Por exemplo, dois ângulos medindo 25° e 65° são complementares, uma vez que $25° + 65° = 90°$; por outro lado, o complemento de um ângulo de 30° é um ângulo de medida igual a $90° - 30° = 60°$.

A primeira proposição de Geometria Euclidiana plana que vamos provar fornece uma condição *suficiente* para a igualdade de dois ângulos. Contudo, antes de enunciá-la precisamos da seguinte

Definição 1.8. Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ (de mesmo vértice O) são **opostos pelo vértice** (abreviamos **OPV**) se seus lados forem semirretas opostas.

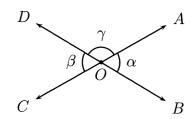



Figura 1.17: ângulos opostos pelo vértice.

Os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ da figura 1.17 são OPV, uma vez que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$, bem como as semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$, são respectivamente opostas.

Proposição 1.9. Dois ângulos OPV são iguais.

Prova. Vamos nos referir à figura 1.17. Como $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são semirretas opostas, segue que $\alpha + \gamma = 180°$. Analogamente, $\beta + \gamma = 180°$. Portanto,

$$\alpha = 180° - \gamma = \beta.$$

■

Problemas – Seção 1.2

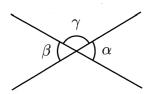
1. Se a interseção de duas regiões convexas de um plano não for o conjunto vazio, prove que ela também é uma região convexa.

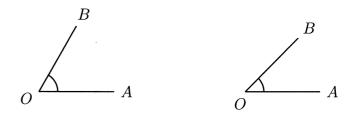
2. Calcule a medida do ângulo que, somado ao triplo de seu complemento, dá $210°$ como resultado.

3. Calcule as medidas de dois ângulos complementares, sabendo que o complemento do dobro de um deles é igual à terça parte do outro.

4. Os ângulos α e β são OPV e suas medidas em graus são expressas por $9x-2$ e $4x+8$, respectivamente. Calcule, também em graus, a medida de $\alpha+\beta$.

5. * Se duas retas se intersectam, prove que um dos ângulos por elas formados é igual a $90°$ se, e só se, os quatro ângulos o forem.

6. Na figura abaixo, o ângulo α mede a sexta parte do ângulo γ mais a metade do ângulo β. Calcule a medida de α.

7. Cinco semirretas, de mesma origem O, formam cinco ângulos que cobrem todo o plano e têm medidas em graus proporcionais aos números 2, 3, 4, 5 e 6. Calcule a medida do maior de tais ângulos.

8. Construa, com régua e compasso, um ângulo cuja medida seja igual à soma das medidas dos ângulos $\angle AOB$ e $A'O'B'$ da figura abaixo:

9. Sobre um círculo de centro O marcamos três pontos A, B e C, tais que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC}$, onde os arcos a que nos referimos são os arcos menores correspondentes. Calcule as medidas dos ângulos $\angle AOB, \angle BOC$ e $\angle AOC$.

10. Calcule a medida de um ângulo agudo, sabendo que a mesma excede a medida de seu complemento em $76°$.

11. Três semirretas de mesma origem O formam três ângulos que cobrem todo o plano. Mostre que ao menos um desses ângulos mede pelo menos $120°$ e ao menos um mede no máximo $120°$.

1.3 Polígonos

Considere três pontos A, B e C no plano. Se C estiver sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, diremos que A, B e C são **colineares**; caso contrário, diremos que A, B e C são **não colineares** (figura 1.18).

Três pontos não colineares formam um **triângulo**. Nesse caso, a **região triangular** correspondente é região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo A,

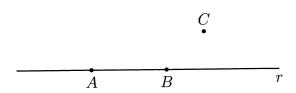



Figura 1.18: três pontos não colineares.

B e C tais pontos, diremos que A, B e C são os **vértices** do triângulo ABC. Mostramos, na figura 1.19, o triângulo ABC que tem por vértices os pontos A, B e C da figura 1.18.

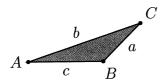



Figura 1.19: o triângulo ABC de vértices A, B e C.

Ainda em relação a um triângulo genérico ABC, diremos que os segmentos AB, AC e BC (ou seus comprimentos) são os **lados** do triângulo; em geral, escreveremos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo ABC (figura 1.19). A soma dos comprimentos dos lados do triângulo é seu **perímetro**, o qual será, doravante, denotado por $2p$; assim, p é o **semiperímetro** do triângulo. Nas notações da figura 1.19, temos

$$p = \frac{a+b+c}{2}. \tag{1.1}$$

Os ângulos $\angle A = \angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$ e $\angle C = \angle ACB$ (ou suas medidas $\widehat{A} = B\widehat{A}C$, $\widehat{B} = A\widehat{B}C$ e $\widehat{C} = A\widehat{C}B$) são os **ângulos internos** do triângulo.

Podemos classificar triângulos de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos; vejamos, por enquanto, como classificá-los em relação aos comprimentos de seus lados. Como todo triângulo tem três lados, as únicas possibilidades para os comprimentos dos mesmos são que haja pelo menos dois lados iguais ou que os três lados sejam diferentes dois a dois. Assim, temos a definição a seguir.

Definição 1.10. Um triângulo ABC é denominado:

(a) **Equilátero**, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.

(b) **Isósceles**, se ao menos dois dentre $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ forem iguais.

(c) **Escaleno**, se $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$.

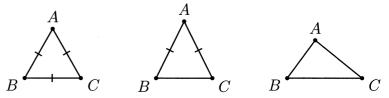



Figura 1.20: triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.).

Pela definição acima, todo triângulo equilátero é isósceles; no entanto, a recíproca não é verdadeira (veja, por exemplo, o triângulo ABC do centro na figura 1.20, para o qual temos claramente $\overline{AB} = \overline{AC} \neq \overline{BC}$).

Quando ABC for um triângulo isósceles, tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$, diremos que o lado BC é a **base** do triângulo. Para triângulos equiláteros, podemos chamar um qualquer de seus lados de base, mas, nesse caso, raramente usamos essa palavra, i.e., em geral reservamos a palavra base para triângulos isósceles que não são equiláteros.

Um triângulo é um tipo particular de *polígono convexo*, conforme a definição a seguir.

Definição 1.11. Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2\ldots A_n$ é um **polígono (convexo)** se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).

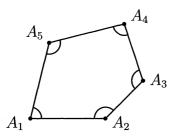



Figura 1.21: um polígono convexo de cinco vértices (e lados).

Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são os **vértices** do polígono; os segmentos A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 (ou, por vezes, seus comprimentos) são os **lados** do polígono. Assim como com triângulos, a soma dos comprimentos dos lados do polígono é o **perímetro** do mesmo. A **região poligonal** correspondente ao polígono $A_1A_2\ldots A_n$ é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 (para um exemplo, veja a figura 1.22).

Uma **diagonal** de um polígono é qualquer um dos segmentos A_iA_j que não seja um lado do mesmo; por exemplo, o polígono $A_1A_2\ldots A_5$ da figura 1.21 possui exatamente cinco diagonais: A_1A_3, A_1A_4, A_2A_4, A_2A_5 e A_3A_5. Provaremos, na proposição 1.12, que todo polígono convexo com n lados possui exatamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais (veja também o problema 1, página 25).

Os ângulos convexos $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (ou simplesmente $\angle A_i$, $1 \leq i \leq n$) são os **ângulos internos** do polígono. Assim, todo polígono de n

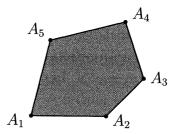



Figura 1.22: a região poligonal correspondente ao polígono da figura 1.21.

vértices possui exatamente n ângulos internos. Na figura 1.21 marcamos os ângulos internos do polígono $A_1A_2\ldots A_5$. Um polígono convexo $A_1A_2\ldots A_n$ possui exatamente dois **ângulos externos** em cada um de seus vértices; no vértice A_1, por exemplo, tais ângulos são aquele formado pelo lado A_1A_2 e pelo prolongamento do lado A_nA_1, no sentido de A_n para A_1, bem como o ângulo oposto pelo vértice a esse. (Na figura 1.23, marcamos os ângulos externos do polígono $A_1A_2\ldots A_5$ no vértice A_1.) Analogamente, definimos os ângulos externos de $A_1A_2\ldots A_n$ em cada um dos outros $n-1$ vértices restantes.

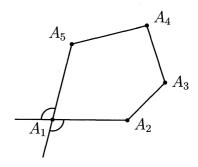



Figura 1.23: ângulos externos do polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$ em A_1.

Em geral, dizemos que um polígono $A_1A_2\ldots A_n$ é um **n−ágono**, em referência a seu número n de lados (e de vértices). Contudo, são consagrados pelo uso os nomes **quadrilátero** para $n = 4$, **pentágono** para $n = 5$, **hexágono** para $n = 6$, **heptágono** para $n = 7$, **octógono** para $n = 8$ e **decágono** para $n = 10$. Ainda no que concerne quantidades específicas de lados, é costume nomear os vértices de um polígono com letras latinas maiúsculas distintas. Por exemplo, um quadrilátero será, em geral, denotado por $ABCD$ e, nesse caso, sempre suporemos, salvo menção explícita em contrário, que os lados do mesmo são AB, BC, CD e DA. Observações análogas são válidas para pentágonos, hexágonos etc.

A proposição a seguir estabelece o número de diagonais de um n−ágono convexo.

Proposição 1.12. Todo n−ágono convexo possui exatamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Prova. Se $n = 3$ não há nada a provar, uma vez que triângulos não têm diagonais e $\frac{n(n-3)}{2} = 0$ para $n = 3$. Suponha, pois, $n \geq 4$. Unindo o vértice A_1 aos $n - 1$ vértices restantes $A_2, \ldots, A_n$ obtemos $n - 1$ segmentos; destes, dois são lados (A_1A_2 e A_1A_n) e os $n - 3$ restantes (A_1A_3, $\ldots$, A_1A_{n-1}) são diagonais (figura 1.24). Como um

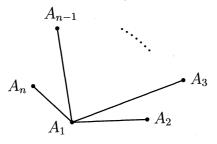



Figura 1.24: diagonais de um n−ágono convexo partindo de A_1.

raciocínio análogo é válido para qualquer outro vértice, segue que, de

cada vértice do polígono, partem exatamente $n - 3$ diagonais. Isso nos *daria* um total de $n(n-3)$ diagonais (i.e., $n - 3$ diagonais para cada um dos n vértices). *Daria*, porque cada diagonal A_iA_j foi contada, da maneira acima, duas vezes: uma quando contamos as diagonais que partem do vértice A_i e outra quando contamos as que partem do vértice A_j. Portanto, para obter o número correto de diagonais do polígono, devemos dividir por 2 o total $n(n-3)$, obtendo, então, $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais. ■

Problemas – Seção 1.3

1. Prove a fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo (proposição 1.12) por indução sobre o número de lados do mesmo.

2. A partir de um dos vértices de um polígono convexo podemos traçar tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Encontre o número de lados do polígono.

3. Três polígonos convexos têm números de lados iguais a três naturais consecutivos. Sabendo que a soma dos números de diagonais dos polígonos é 133, calcule o número de lados do polígono com maior número de diagonais.

CAPÍTULO 2

Congruência de Triângulos

Este capítulo é devotado ao estudo de condições necessárias e suficientes para que dois triângulos possam ser considerados *iguais*, num sentido a ser precisado. Discutimos, ainda, várias consequências interessantes de tais conjuntos de condições, notadamente o quinto axioma de Euclides (também conhecido como o *axioma das paralelas*), a desigualdade triangular e os vários tipos de quadriláteros notáveis.

2.1 Os casos LAL, ALA e LLL

Consideremos, inicialmente, o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1. Construa com régua e compasso um triângulo equilátero ABC de lados iguais a l.

Solução.

l

Descrição dos passos.

1. Marque um ponto arbitrário A no plano.

2. Com a abertura do compasso igual a l, centre-o em A e construa o círculo de centro A e raio l.

3. Marque um ponto arbitrário B sobre tal círculo.

4. Com a abertura do compasso igual a l, centre-o em B e construa o círculo de centro B e raio l.

5. Denotando por C uma qualquer das interseções dos dois círculos traçados, construímos um triângulo ABC, equilátero e de lado l.

■

No exemplo acima, construímos um triângulo tendo certas propriedades pré-estabelecidas (ser equilátero, com comprimento dos lados conhecido). Ao resolvê-lo, aceitamos implicitamente o fato de que só havia, essencialmente, *um* triângulo satisfazendo as propriedades pedidas; de outro modo, qualquer outro triângulo que tivéssemos construído mereceria ser qualificado como *igual* ao triângulo construído, uma vez que só diferiria desse por sua posição no plano.

A discussão acima motiva a noção de *igualdade* para triângulos, a qual recebe o nome especial de **congruência**: dizemos que dois triângulos são **congruentes** se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.

Assim, se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ forem congruentes, deve existir uma *correspondência* entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como o sejam os lados opostos a vértices correspondentes. A figura 2.1 mostra dois triângulos congruentes ABC e $A'B'C'$, com a correspondência de vértices

$$A \longleftrightarrow A'; \quad B \longleftrightarrow B'; \quad C \longleftrightarrow C'.$$

Para tais triângulos, temos então

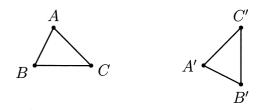



Figura 2.1: dois triângulos congruentes.

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'};\ \widehat{B} = \widehat{B'};\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'};\ \overline{AC} = \overline{A'C'};\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases}.$$

É imediato que a congruência de triângulos possui as duas propriedades interessantes a seguir[1]:

1. **Simetria**: tanto faz dizermos que um triângulo ABC é congruente a um triângulo DEF quanto que DEF é congruente a ABC, ou mesmo que ABC e DEF são congruentes. Isso porque, se pudermos mover ABC, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir

[1]O leitor com algum conhecimento prévio de Geometria Euclidiana notará que, no que segue, não listamos a propriedade *reflexiva* da congruência de triângulos. Nesse sentido, sempre que nos referirmos, em um certo contexto, a *dois triângulos*, ficará implícito que os mesmos são, necessariamente, *distintos*.

com DEF, então certamente poderemos fazer o movimento contrário com DEF, até superpô-lo a ABC.

2. **Transitividade**: se ABC for congruente a DEF e DEF for congruente a GHI, então ABC será congruente a GHI. Isso porque podemos mover ABC até fazê-lo coincidir com GHI por partes: primeiro, movemos ABC até que ele coincida com DEF e, então, continuamos a movê-lo até que coincida com GHI.

Doravante, escreveremos

$$ABC \equiv A'B'C'$$

para denotar que os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, com a correspondência de vértices

$$A \longleftrightarrow A'; \quad B \longleftrightarrow B'; \quad C \longleftrightarrow C'.$$

Seria interessante dispormos de critérios para decidir se dois triângulos dados são ou não congruentes. Tais critérios deveriam ser os mais simples possíveis, a fim de facilitar a verificação da congruência. Esses critérios existem e são chamados **casos de congruência de triângulos**.

No que segue, vamos estudar os vários casos de congruência de triângulos sob um ponto de vista informal. Cada caso é precedido de um problema de construção com régua e compasso, cuja solução motiva sua formalização.

Exemplo 2.2. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\widehat{C} = \gamma$.

Solução.

a b γ

Descrição dos passos.

1. Marque um ponto C no plano e, em seguida, trace uma semirreta $\overrightarrow{CX}$ de origem C.

2. Transporte o ângulo dado para um ângulo $X\widehat{C}Y = \gamma$, de vértice C, determinando a semirreta $\overrightarrow{CY}$ de origem C.

3. Sobre as semirretas $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{CY}$ marque, respectivamente, os pontos B e A tais que $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.

■

Analisando os passos da construção acima notamos que, escolhendo outra posição para o vértice C e outra direção para os lados do ângulo $\angle XCY$, a construção do triângulo ABC continuaria *determinada* pelos dados do exemplo e obteríamos um triângulo que, intuitivamente, gostaríamos de qualificar como congruente ao triângulo inicial. Essa discussão motiva nosso primeiro caso de congruência, conhecido como o caso **LAL**.

Axioma 2.3 (LAL). Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

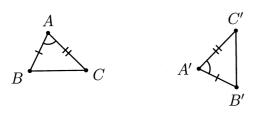



Figura 2.2: o caso de congruência LAL.

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

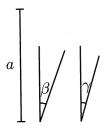
$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{AC}=\overline{A'C'}\\ \widehat{A}=\widehat{A'}\end{array}\right\}\stackrel{\text{LAL}}{\Longrightarrow} ABC\equiv A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A\leftrightarrow A'$, $B\leftrightarrow B'$, $C\leftrightarrow C'$. Em particular, segue, daí, que

$$\widehat{B}=\widehat{B'},\quad \widehat{C}=\widehat{C'}\ \text{ e }\ \overline{BC}=\overline{B'C'}.$$

Consideremos, agora, o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4. *Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos $\overline{BC}=a$, $\widehat{B}=\beta$ e $\widehat{C}=\gamma$.*

Solução.

Descrição dos passos.

1. Trace uma reta r e, sobre a mesma, marque pontos B e C tais que $\overline{BC}=a$.
2. Construa uma semirreta $\overrightarrow{BX}$ tal que $C\widehat{B}X=\beta$.
3. No semiplano determinado por r e X construa a semirreta $\overrightarrow{CY}$ tal que $B\widehat{C}Y=\gamma$.
4. Marque o ponto A como interseção das semirretas $\overrightarrow{BX}$ e $\overrightarrow{CY}$.

■

Aqui novamente, analisando os passos da construção acima, notamos que, escolhendo outra posição para o lado BC e mantendo $\overline{BC}=a$, a construção do triângulo ABC continuaria *determinada* pelas medidas impostas aos ângulos $\angle B$ e $\angle C$, de modo que obteríamos um triângulo que gostaríamos de qualificar como congruente ao triângulo inicial. Essa discussão motiva nosso segundo caso de congruência, o caso **ALA**.

Axioma 2.5 (ALA)**.** Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

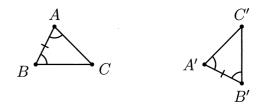



Figura 2.3: o caso de congruência ALA.

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\\ \overline{AB}=\overline{A'B'}\end{array}\right\}\stackrel{ALA}{\Longrightarrow} ABC\equiv A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A\leftrightarrow A'$, $B\leftrightarrow B'$, $C\leftrightarrow C'$. Em particular, também devemos ter

$$\widehat{C}=\widehat{C'},\quad \overline{AC}=\overline{A'C'}\ \text{ e }\ \overline{BC}=\overline{B'C'}.$$

Examinemos, agora, o exemplo que motivará nosso terceiro caso de congruência.

Exemplo 2.6. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{BC}=a$.

Solução.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace uma reta r e, sobre a mesma, marque pontos B e C tais que $\overline{BC}=a$.
2. Trace os círculos de centro B e raio c e de centro C e raio b.
3. Marque o ponto A como um dos pontos de interseção dos círculos traçados no item anterior.

■

Uma vez mais, os passos da construção evidenciam que, com outro posicionamento inicial para o lado BC (mantida, é claro, a condição $\overline{BC}=a$), obteríamos um triângulo que gostaríamos de qualificar como congruente ao triângulo inicial. Isto motiva, então, nosso terceiro caso de congruência, o caso **LLL**, enunciado a seguir.

Axioma 2.7 (LLL). Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

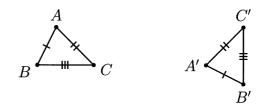



Figura 2.4: o caso de congruência LLL.

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB}=\overline{A'B'}\\ \overline{BC}=\overline{B'C'}\\ \overline{CA}=\overline{C'A'}\end{array}\right\}\stackrel{LLL}{\Longrightarrow} ABC\equiv A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A\leftrightarrow A'$, $B\leftrightarrow B'$, $C\leftrightarrow C'$. Em particular, também temos

$$\widehat{A}=\widehat{A'},\quad \widehat{B}=\widehat{B'}\ \text{ e }\ \widehat{C}=\widehat{C'}.$$

Vale observar que os casos de congruência ALA e LLL decorrem do caso LAL no seguinte sentido: dados, no plano, dois triângulos quaisquer, pode ser mostrado que a validade de um qualquer dos conjuntos de condições ALA ou LLL para os mesmos acarreta a validade

de uma condição do tipo LAL. No entanto, como tais deduções não implicariam em ganho substancial para o propósito destas notas, não as apresentaremos aqui (para uma exposição, referimos o leitor a [3]). Por fim, apresentaremos os dois últimos casos de congruência de triângulos no corolário 2.22 e no problema 1, página 54, mostrando como tais casos podem ser deduzidos a partir dos casos ALA e LLL, estudados acima.

Por fim, observamos que, uma vez estabelecida a congruência de dois triângulos, sempre que não houver perigo de confusão omitiremos a correspondência entre seus vértices. Essa praxe será utilizada várias vezes no restante dessas notas, de forma que exortamos o leitor, em cada uma de tais oportunidades, a checar com cuidado a correspondência apropriada entre os vértices envolvidos, para o bem da compreensão do texto.

Problemas – Seção 2.1

1. (a) Dê um exemplo mostrando dois triângulos congruentes para os quais não seja possível *mover rigidamente* (i.e., sem deformar) um deles *no plano* até fazê-lo coincidir com o outro.

   (b) Em que diferem os dois triângulos congruentes do item (a) que justifique não podermos fazer tal movimento no plano?

   (c) Para o exemplo do item (a), mostre como mover rigidamente um dos triângulos no espaço até fazê-lo coincidir com o outro.

2.2 Aplicações de congruência

Colecionamos, nesta seção, algumas aplicações úteis dos casos de congruência de triângulos estudados na seção anterior. Tais aplicações

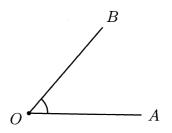
aparecerão doravante com tanta frequência que o leitor deve se esforçar por memorizá-las o quanto antes.

Definição 2.8. Dado um ângulo $\angle AOB$, a **bissetriz** de $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos iguais. Neste caso, dizemos ainda que $\overrightarrow{OC}$ bissecta $\angle AOB$. Assim,

$$\overrightarrow{OC} \text{ bissecta } \angle AOB \iff A\widehat{O}C = B\widehat{O}C.$$

Assumiremos, aqui, que a bissetriz interna de um ângulo, caso exista, é única. O próximo exemplo ensina como construi-la.

Exemplo 2.9. Construa com régua e compasso a bissetriz do ângulo $\angle AOB$ dado abaixo.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Centre o compasso em O e, com uma mesma abertura r, marque pontos $X \in \overrightarrow{OA}$ e $Y \in \overrightarrow{OB}$.

2. Fixe uma abertura $s > \frac{1}{2}\overline{XY}$ e trace, dos círculos de raio s e centros X e Y, arcos que se intersectem num ponto C. A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.

De fato, em relação aos triângulos XOC e YOC construídos acima, temos $\overline{OX} = \overline{OY} = r$ e $\overline{XC} = \overline{YC} = s$; uma vez que o lado OC é comum aos dois triângulos, segue do caso de congruência LLL que $XOC \equiv YOC$. Logo, $X\widehat{O}C = Y\widehat{O}C$ ou, ainda, $A\widehat{O}C = B\widehat{O}C$. ■

Em um triângulo ABC, a **bissetriz interna** relativa a BC (ou ao vértice A) é a porção AP da bissetriz do ângulo interno $\angle A$ do triângulo, desde A até o lado BC; o ponto $P \in BC$ é o **pé da bissetriz interna** relativa a BC. Analogamente, temos em ABC as bissetrizes internas relativas aos lados AC e AB (ou aos vértices B e C, respectivamente), de modo que todo triângulo possui exatamente três bissetrizes internas. Neste momento, é instrutivo o leitor desenhar um triângulo ABC, juntamente com a bissetriz interna relativa ao vértice A e o pé da bissetriz correspondente; a esse respeito, veja também o problema 1, página 43.

Combinando os casos LLL e LAL podemos contruir também o **ponto médio** de um segmento, i.e., o ponto que o divide em duas partes iguais. O próximo exemplo explica como construi-lo.

Exemplo 2.10. Construa com régua e compasso o ponto médio do segmento AB.

Solução.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Fixe uma abertura $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ e trace, dos círculos de raio r e centros A e B, arcos que se intersectem nos pontos X e Y.

2. O ponto M de interseção da reta $\overleftrightarrow{XY}$ com o segmento AB é o ponto médio de AB.

De fato, em relação aos triângulos AXY e BXY, temos $\overline{AX} = \overline{BX}$ e $\overline{AY} = \overline{BY}$; uma vez que o lado XY é comum aos dois triângulos, segue do caso de congruência LLL que $AXY \equiv BXY$. Portanto, $A\widehat{X}Y = B\widehat{X}Y$ ou, ainda, $A\widehat{X}M = B\widehat{X}M$. Agora, nos triângulos AXM e BXM, temos que $\overline{AX} = \overline{BX}$ e $A\widehat{X}M = B\widehat{X}M$; mas, como o lado XM é comum aos mesmos, segue do caso LAL que $AXM \equiv BXM$. Logo, $\overline{AM} = \overline{BM}$. ■

Em um triângulo ABC, a **mediana** relativa ao lado BC (ou ao vértice A) é o segmento que une o vértice A ao ponto médio do lado BC. Analogamente, temos em ABC medianas relativas aos lados AC e AB (ou aos vértices B e C, respectivamente), de modo que todo triângulo possui exatamente três medianas. Sugerimos ao leitor desenhar um triângulo ABC, juntamente com sua mediana relativa ao vértice A e o ponto médio do lado correspondente; veja também o problema 2, página 43.

Dadas duas retas r e s no plano, dizemos que r é *perpendicular* a s, que s é perpendicular a r ou, ainda, que r e s são **perpendiculares** quando r e s tiverem um ponto em comum e formarem ângulos de $90°$ nesse ponto (a esse respeito, veja o problema 5, página 18). Escrevemos $r \perp s$ para denotar que duas retas r e s são perpendiculares. O próximo exemplo mostra como usar os casos de congruência estudados anteriormente para construir a reta perpendicular a uma reta dada e passando por um ponto dado.

Exemplo 2.11. Dados, no plano, uma reta r e um ponto A, construa com régua e compasso uma reta s tal que $r \perp s$ e $A \in s$.

Solução. Há dois casos a considerar:

(a)

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Com o compasso centrado em A, descreva um arco de círculo que intersecte a reta r em dois pontos distintos B e C.

2. Construa o ponto médio M de BC e faça $s = \overleftrightarrow{AM}$.

De fato, em relação aos triângulos ABM e ACM, temos $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BM} = \overline{CM}$; como AM é lado de ambos os triângulos, segue do caso LLL que $ABM \equiv ACM$ e, daí, $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C$. Mas, como $A\widehat{M}B + A\widehat{M}C = 180°$, devemos ter, então, que $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C = 90°$ ou, ainda, $\overleftrightarrow{AM} \perp r$.

(b)

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Com o compasso centrado em A, descreva um semicírculo que intersecta a reta r nos pontos B e C.

2. Trace, agora, círculos de raio $r > \frac{1}{2}\overline{BC}$ e centros respectivamente em B e em C; sendo A' um dos pontos de interseção de tais círculos, temos $\overleftrightarrow{A'A} \perp r$.

De fato, temos $ABA' \equiv ACA'$ por LLL e, daí, $A'\widehat{A}B = A'\widehat{A}C$. Mas, como $A'\widehat{A}B + A'\widehat{A}C = 180°$, segue que $A'\widehat{A}B = A'\widehat{A}C = 90°$. ■

Nas notações do exemplo anterior, se $A \notin r$, então o ponto de interseção da reta s, perpendicular a r por A, é denominado o **pé da perpendicular** baixada de A a r.

Observação 2.12. Dados, no plano, um ponto A e uma reta r, é possível mostrar que existe uma *única* reta s, perpendicular a r e passando por A (a esse respeito, veja o problema 19, página 57).

Dados, no plano, um ponto A e uma reta r, com $A \notin r$, a **distância** do ponto A à reta r é definida como o comprimento do segmento AP, onde P é o pé da perpendicular baixada de A a r (cf. figura 2.5). Denotando por d a distância de A a r, temos então $d = \overline{AP}$. Provaremos

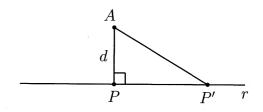



Figura 2.5: distância do ponto A à reta r.

na seção 2.4 (cf. corolário 2.24) que o comprimento do segmento AP é menor que o comprimento de qualquer outro segmento unindo A a um ponto $P' \in r$, com $P' \neq P$; nas notações da figura 2.5, $d < \overline{AP'}$.

Em um triângulo ABC, a **altura** relativa ao lado BC (ou ao vértice A) é o segmento que une o vértice A ao pé da perpendicular baixada de A à *reta* $\overleftrightarrow{BC}$. Nesse caso, denominamos o pé da perpendicular em questão de **pé da altura** relativa a BC. Analogamente, temos em ABC alturas relativas aos lados AC e AB (ou aos vértices B e C, respectivamente), de modo que todo triângulo possui exatamente

três alturas. A esta altura, sugerimos ao leitor desenhar um triângulo ABC, juntamente com sua altura relativa ao vértice A e o pé da altura correspondente; a esse respeito, veja também o problema 3, página 43.

Finalizamos essa seção estudando uma propriedade muito importante dos triângulos isósceles:

Proposição 2.13. Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, então $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Prova. A prova dessa proposição está embutida na justificativa que demos para a construção do ponto médio de um segmento. Em todo caso, vamos repeti-la.

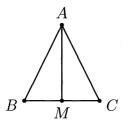



Figura 2.6: ABC isósceles $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$.

Seja M o ponto médio do lado BC (figura 2.6). Como $\overline{BM} = \overline{CM}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e AM é lado comum de AMB e AMC, segue do caso de congruência LLL que tais triângulos são congruentes. Logo, $A\widehat{B}M = A\widehat{C}M$. ■

Corolário 2.14. Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos iguais.

Prova. Basta observar que todos os lados de um triângulo equilátero podem ser vistos como bases do mesmo, considerado como triângulo isósceles. ■

Problemas – Seção 2.2

1. Construa com régua e compasso as bissetrizes internas do triângulo ABC da figura 2.7.

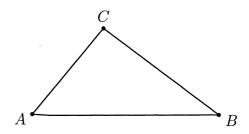



Figura 2.7: bissetrizes internas de um triângulo.

2. Construa com régua e compasso as medianas do triângulo ABC da figura 2.8.

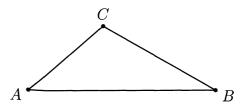



Figura 2.8: medianas de um triângulo.

3. Construa com régua e compasso as alturas do triângulo ABC da figura 2.9.

Após os três problemas acima, vale a pena tecermos alguns comentários. Em primeiro lugar, é imediato, a partir das definições dadas, que as bissetrizes internas e as medianas de um triângulo

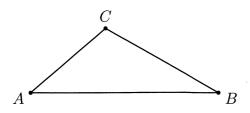



Figura 2.9: alturas de um triângulo.

estão sempre contidas no mesmo; isso não é necessariamente verdadeiro para as alturas, conforme você pôde notar no último problema acima. Por outro lado, você deve ter notado que, nas construções efetuadas nos três problemas referidos, as bissetrizes internas do triângulo ABC passaram todas por um mesmo ponto, o mesmo tendo ocorrido para as medianas e as alturas. Tais concorrências não são devidas aos triângulos ABC escolhidos; de fato, provar que bissetrizes internas, medianas e alturas de um triângulo qualquer sempre passam por um mesmo ponto será objeto da seção 3.2.

4. * Sejam dados, no plano, um ponto A e uma reta r, com $A \notin r$. Dizemos que um ponto A' é o **simétrico** de A em relação à reta r quando $\overleftrightarrow{AA'} \perp r$ e r passar pelo ponto médio do segmento AA'. Mostre como construir A' com régua e compasso[2].

5. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos os comprimentos $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e m_a da mediana relativa a A.

[2]Para estudar sistematicamente *reflexão* como uma *transformação geométrica* (cf. [15]), é necessário definirmos o simétrico A' de um ponto A em relação à reta r quando $A \in r$; nesse caso, pomos $A' = A$.

6. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecendo os comprimentos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e m_a da mediana relativa a BC.

7. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecidos os comprimentos $\overline{AB} = c$ e β_a da bissetriz interna relativa ao lado BC, bem como a medida $\angle BAC = \alpha$.

8. * Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, prove que a bissetriz, a mediana e a altura relativas a BC coincidem.

9. * Sejam ABC um triângulo e P, M e H respectivamente os pés da bissetriz interna, mediana e altura relativas ao lado BC. Se P e H ou M e H coincidirem[3], prove que ABC é isósceles de base BC.

10. * Seja Γ um círculo de centro O e AB uma corda de Γ. Se M é um ponto sobre AB, prove que

$$OM \perp AB \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{BM}.$$

2.3 Paralelismo

Dadas duas retas no plano, temos somente duas possibilidades para as mesmas: ou elas têm um ponto em comum ou não têm nenhum ponto em comum; no primeiro caso, as retas são ditas **concorrentes**; no segundo, as retas são **paralelas** (figura 2.10).

Dados uma reta r e um ponto A não pertencente a r, gostaríamos de estudar o problema de traçar, pelo ponto A, uma reta paralela à reta r. Para tanto, precisamos do resultado auxiliar a seguir.

[3]O caso $M = P$ será tratado no problema 19, página 122; veja também o problema 5, página 157.

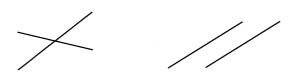



Figura 2.10: retas concorrentes (esq.) e paralelas (dir.).

Lema 2.15. Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Prova. Seja ABC um triângulo qualquer e M o ponto médio do lado AC (figura 2.11). Prolongue a semirreta $\overrightarrow{BM}$ até o ponto B', tal que $\overline{BM} = \overline{MB'}$, e considere os triângulos ABM e $CB'M$. Temos $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{BM} = \overline{B'M}$ e $A\widehat{M}B = C\widehat{M}B'$ (ângulos OPV). Portanto, pelo caso LAL, temos $AMB \equiv CMB'$ e, daí, $B'\widehat{C}M = B\widehat{A}M$. Logo,

$$X\widehat{C}A > B'\widehat{C}A = B'\widehat{C}M = B\widehat{A}M = B\widehat{A}C.$$

Analogamente, prova-se que $X\widehat{C}A > A\widehat{B}C$. ∎

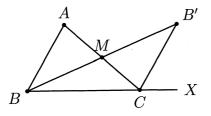



Figura 2.11: a desigualdade do ângulo externo.

O exemplo abaixo mostra como fazer uma das construções com régua e compasso mais importantes da Geometria Euclidiana, qual seja, a de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto também dado.

Exemplo 2.16. Construa com régua e compasso uma reta s, paralela à reta r e passando pelo ponto A.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Tome pontos C e X sobre a reta r e una A a C.
2. Construa um ângulo $\angle CAY$ tal que $C\widehat{A}Y = A\widehat{C}X$ e X e Y estejam situados em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$.
3. A reta $s = \overleftrightarrow{AY}$ é paralela à reta r.

A fim de justificar a construção acima, suponha, por contradição, que a reta $\overleftrightarrow{AY}$ intersecte a reta r em um ponto B (figura 2.12). Analisemos o caso em que $C \in BX$, sendo o outro caso totalmente análogo.

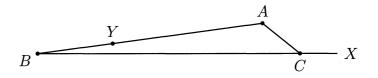



Figura 2.12: construção de uma paralela a uma reta por um ponto.

Por construção, teríamos

$$B\widehat{A}C = Y\widehat{A}C = A\widehat{C}X;$$

por outro lado, como $\angle ACX$ é ângulo externo do triângulo ABC, seguiria do lema anterior que

$$B\widehat{A}C < A\widehat{C}X,$$

o que é uma contradição. Logo, as retas $\overleftrightarrow{AY}$ e r são paralelas. ∎

Se duas retas r e s forem paralelas, escreveremos $r \parallel s$. Na Geometria Euclidiana, *não é possível* deduzir, a partir de fatos mais básicos assumidos como verdadeiros, que, por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa *uma única* reta paralela à mesma. Em seu livro *Elementos*, Euclides impôs a unicidade da reta paralela como um postulado, conhecido na literatura como o **quinto postulado**, ou **postulado das paralelas**. Porém, para a grande maioria dos matemáticos que estudaram a obra de Euclides, tal postulado parecia muito mais complexo que os quatro anteriores[4], o que os fez pensar, por vários séculos, que fosse possível deduzi-lo, como um teorema, a partir dos postulados anteriores. Porém, todas as tentativas de se descobrir tal demonstração foram vãs. Então, ocorreu que, no início do século XIX, o matemático húngaro János Bolyai e o matemático russo Nikolai Lobatchevsky mostraram, independentemente, que, de fato, era necessário *assumir* a unicidade da paralela como um postulado. O que eles fizeram foi construir outro tipo de geometria, denominada *Geometria Hiperbólica*, na qual ainda são válidos os quatro primeiros postulados de Euclides, mas tal que, por um ponto fora de uma reta qualquer, é possível traçar *infinitas* retas paralelas à reta dada[5].

[4]Quais sejam: por dois pontos quaisquer podemos traçar uma única reta; todo segmento de reta pode ser prolongado em uma reta; dados um ponto e um segmento tendo tal ponto por extremidade, existe um círculo que tem centro no ponto dado e raio igual ao segmento dado; todos os ângulos retos são iguais.

[5]Para uma introdução elementar à Geometria Hiperbólica, bem como para uma discussão sobre as inúmeras tentativas frustradas de se demonstrar o quinto postulado de Euclides, recomendamos ao leitor as referências [4] ou [13]. Referimos também o leitor a [2] ou [13] para a construção da *Geometria Elíptica*, na qual duas retas quaisquer sempre se intersectam.

Figura 2.13: Lobatchevsky

Assim é que, dados no plano uma reta r e um ponto $A \notin r$, assumimos a unicidade da paralela como um postulado, conforme enunciado a seguir.

Postulado 2.17. Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s, paralela a r e passando por A.

Uma construção da paralela a uma reta dada e passando por um ponto não pertencente à mesma, mais simples que aquela delineada no exemplo 2.16, será vista na seção 2.5 (cf. exemplo 2.32).

De posse do quinto postulado, podemos enunciar e provar alguns dos mais importantes resultados da Geometria Euclidiana. Para o primeiro deles, suponha dadas, no plano, retas r, s e t, com t intersectando r e s nos pontos A e B, respectivamente (figura 2.14). Nas notações da figura 2.14, os ângulos α e β são ditos **alternos internos**, ao passo que os ângulos α e γ são chamados **colaterais internos**.

De posse da nomenclatura acima, temos o seguinte critério para o paralelismo de duas retas.

Corolário 2.18. Nas notações da figura 2.14, temos

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180°.$$

Figura 2.14: ângulos alternos internos e colaterais internos.

Prova. Inicialmente, note que, como $\beta + \gamma = 180°$, temos $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180°$. Portanto, basta provarmos que $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Já provamos, no exemplo 2.16, que $\alpha = \beta \Rightarrow r \parallel s$, de modo que basta provar a implicação contrária. Suponha, pois, que $r \parallel s$. Então, pelo quinto postulado, s é a *única* reta paralela a r e passando por B, de sorte que pode ser construída conforme prescrito no exemplo 2.16. Logo, segue da construção descrita naquele exemplo que $\alpha = \beta$. ∎

Outra consequência da discussão acima, ademais extremamente relevante, é a constante do resultado a seguir.

Proposição 2.19. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Prova. Sejam ABC um triângulo qualquer e $\overleftrightarrow{XY}$ a reta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ e passando por A (figura 2.15). Pelo corolário 2.18, temos que $\widehat{B} = B\widehat{A}X$ e $\widehat{C} = C\widehat{A}Y$, de sorte que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + B\widehat{A}X + C\widehat{A}Y = 180°.$$

∎

Corolário 2.20. Os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a 60°.

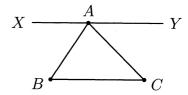



Figura 2.15: soma dos ângulos internos de um triângulo.

Prova. Pelo corolário 2.14, todo triângulo equilátero tem três ângulos iguais. Mas, como a soma de tais ângulos é 180°, cada um deles deve medir 60°. ∎

O resultado do corolário a seguir é conhecido na literatura como o **teorema do ângulo externo**.

Corolário 2.21. Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Prova. Basta ver (figura 2.16) que $A\widehat{C}X = 180° - \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B}$, onde usamos a proposição 2.19 na última igualdade. ∎

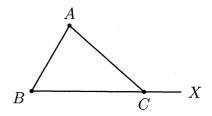



Figura 2.16: o teorema do angulo externo.

Vejamos, agora, como classificar triângulos quanto às medidas de seus ângulos internos. Para tanto, note primeiro que a proposição 2.19

garante que todo triângulo tem no máximo um ângulo interno maior ou igual que $90°$. De fato, se, em um triângulo ABC, tivéssemos $\widehat{A} \geq 90°$ e $\widehat{B} \geq 90°$, viria que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A} + \widehat{B} \geq 90° + 90° = 180°,$$

o que é um absurdo. Assim, um triângulo é **acutângulo** se todos os seus ângulos internos forem agudos, **retângulo** se tiver um ângulo reto e **obtusângulo** se tiver um ângulo obtuso (figura 2.17).

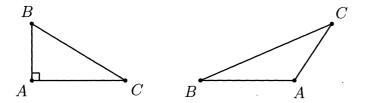



Figura 2.17: triângulos retângulo (esq.) e obtusângulo (dir.) em A.

No caso de um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa** do mesmo, enquanto os outros dois lados são seus **catetos**. Nas notações da figura 2.17, BC é a hipotenusa e AB e AC são os catetos. Teremos mais a dizer sobre triângulos retângulos na seção 4.2.

Terminamos esta seção estudando mais um conjunto de condições suficientes para a congruência de dois triângulos, conjunto este conhecido como o caso de congruência **LAAo**. O último conjunto de condições suficientes para a congruência de dois triângulos será visto no problema 1, página 54.

Corolário 2.22. Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Em símbolos, dados triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array}\right\} \stackrel{\text{LAAo}}{\Longrightarrow} ABC \equiv A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também temos

$$\widehat{C} = \widehat{C'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'} \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

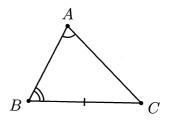



Figura 2.18: o caso de congruencia LAAo

Prova. Basta observar que as condições $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$ fornecem

$$\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = 180° - \widehat{A'} - \widehat{B'} = \widehat{C'}.$$

Portanto, para os triângulos em questão, temos que

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}; \quad \widehat{B} = \widehat{B'}; \quad \widehat{C} = \widehat{C'}.$$

Pelo caso ALA, tais triângulos são congruentes. ■

O problema de construir um triângulo dados um lado e dois ângulos internos, um deles oposto ao lado dado, será discutido na seção 2.5 (cf. exemplo 2.34).

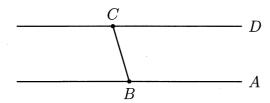
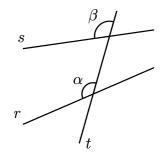
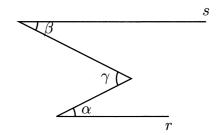
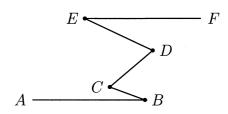
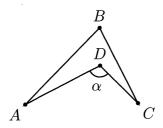
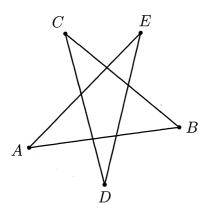
Problemas – Seção 2.3

1. * Se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos do primeiro são respectivamente congruentes à hipotenusa e a um dos catetos do outro, prove que os triângulos são congruentes.

2. * ABC é um triângulo isósceles de base BC e $D \in AB$, $E \in AC$ são pontos tais que $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Sendo F o ponto de interseção dos segmentos CD e BE, mostre que $\overline{BF} = \overline{CF}$.

3. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Prove que as alturas, medianas e bissetrizes internas relativas aos lados AB e AC têm comprimentos iguais.

4. Em um triângulo ABC temos $\widehat{A} = 90°$. Sendo $P \in AC$ o pé da bissetriz interna relativa a B e sabendo que a distância de P ao lado BC é igual a 2cm, calcule o comprimento do segmento AP.

5. Na figura abaixo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas. Sabendo que as medidas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCD$ são respectivamente iguais a $3x - 20°$ e $x + 40°$, calcule o valor de x em graus.

6. Na figura abaixo, prove que $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (os ângulos α e β são denominados **correspondentes**).

7. Na figura abaixo, se $r \parallel s$, prove que $\alpha + \beta = \gamma$.

8. Na figura abaixo, temos $A\widehat{B}C = 20°$, $B\widehat{C}D = 60°$ e $D\widehat{E}F = 25°$. Sabendo que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas, calcule a medida do ângulo $C\widehat{D}E$.

9. Na figura abaixo, prove que $\alpha = D\widehat{A}B + A\widehat{B}C + B\widehat{C}D$.

10. Calcule a soma dos ângulos nos vértices A, B, C, D e E da estrela de cinco pontas da figura abaixo.

11. * Dado um n−ágono convexo, faça os seguintes itens:

    (a) Prove que o polígono pode ser particionado em $n-2$ triângulos, utilizando-se para tanto $n-3$ diagonais que só se intersectam em vértices do mesmo.

    (b) Conclua que a soma dos ângulos internos do polígono é $180°(n-2)$.

    (c) Conclua que a soma de seus ângulos externos (um por vértice) do polígono é $360°$.

12. * Em um triângulo ABC, seja M o ponto médio do lado BC. Se $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, mostre que $B\widehat{A}C = 90°$.

13. * Se I é o ponto de interseção das bissetrizes internas traçadas a partir dos vértices B e C de um triângulo ABC, prove que $B\widehat{I}C = 90° + \frac{1}{2}B\widehat{A}C$.

14. Em um triângulo ABC, sabemos que $\widehat{A}$ é igual à oitava parte da medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes internas dos vértices B e C. Calcule a medida do ângulo $\angle A$.

15. * Em um triângulo ABC, seja I_a o ponto de interseção das bissetrizes externas relativas aos vértices B e C. Prove que $B\widehat{I_a}C = 90° - \frac{1}{2}B\widehat{A}C$.

16. Um triângulo ABC é isósceles de base BC. Os pontos D sobre BC e E sobre AC são tais que $\overline{AD} = \overline{AE}$ e $B\widehat{A}D = 48°$. Calcule $C\widehat{D}E$.

17. O triângulo ABC é isósceles de base BC. Os pontos D e F sobre o lado AB e E sobre o lado AC são tais que $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$. Calcule a medida do ângulo $\angle BAC$.

18. (Torneio das Cidades.) $ABCDEF$ é um hexágono tal que as diagonais AD, BE e CF passam todas por um mesmo ponto M, que as divide ao meio. Prove que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

19. * Dados, no plano, uma reta r e um ponto A, prove que há exatamente uma reta s tal que $r \perp s$ e $A \in s$.

20. Em um triângulo ABC, isósceles de base BC, as alturas relativas aos lados iguais medem 10cm cada.

    (a) Sendo P um ponto qualquer sobre a base BC, calcule a soma das distâncias de P aos lados AB e AC.

    (b) Sendo Q um ponto qualquer sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$ mas não situado sobre a base BC, calcule a diferença das distâncias de Q às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

21. No triângulo ABC, o ponto $D \in BC$ é o pé da bissetriz interna relativa a A. Prove que $A\widehat{D}C - A\widehat{D}B = \widehat{B} - \widehat{C}$.

22. O triângulo ABC, isósceles de base BC, é tal que $B\widehat{A}C = 20°$. Marcamos pontos $D \in AC$ e $E \in AB$ tais que $D\widehat{B}C = 60°$ e $E\widehat{C}B = 50°$. Calcule $B\widehat{D}E$.

2.4 A desigualdade triangular

O objetivo principal desta breve seção é provar que, em todo triângulo, os comprimentos dos lados guardam uma certa relação, descrita na proposição 2.26). Comecemos estabelecendo uma relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos a eles opostos, a qual tem interesse independente.

Proposição 2.23. Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{B} > \widehat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Prova. Como $\widehat{B} > \widehat{C}$, podemos traçar (cf. figura 2.19) a semirreta $\overrightarrow{BX}$, intersectando o interior de ABC e tal que $C\widehat{B}X = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C})$. Sendo P o ponto de interseção de $\overrightarrow{BX}$ com o lado AC, segue do teorema do ângulo externo que

$$A\widehat{P}B = C\widehat{B}P + B\widehat{C}P = \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C}) + \widehat{C} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}).$$

Mas, como $A\widehat{B}P = \widehat{B} - \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{C}) = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$, segue que o triângulo ABP é isósceles de base BP. Portanto,

$$\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}.$$

■

Corolário 2.24. Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{A} \geq 90°$, então $\overline{BC}$ é seu maior lado. Em particular, num triângulo retângulo a hipotenusa é o maior lado.

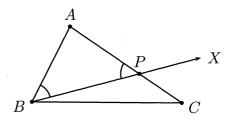



Figura 2.19: ordem dos lados e ângulos de um triângulo.

Prova. Basta observar que, se $\widehat{A} \geq 90°$, então $\widehat{A}$ é o maior ângulo de ABC, de modo que $\overline{BC}$ é, pela proposição anterior, o maior lado. ■

Corolário 2.25. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. Se $B\widehat{A}C < B'\widehat{A'}C'$, então $\overline{BC} < \overline{B'C'}$.

Prova. Seja α o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$ e que contém B.

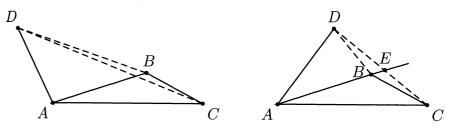



Figura 2.20: triângulos com um par de lados iguais e ângulos desiguais.

Se D é o ponto de α tal que $D\widehat{A}C = B'\widehat{A'}C'$, então $DAC \equiv B'A'C'$ por LAL, de sorte que $\overline{DC} = \overline{B'C'}$. Basta, pois, mostrar que $\overline{DC} > \overline{BC}$ ou, pela proposição 2.23, que $D\widehat{B}C > B\widehat{D}C$. Há dois casos a considerar:

(a) A e D pertencem a um mesmo semiplano em relação a $\overleftrightarrow{BC}$ (cf. figura 2.20, à esquerda): então

$$D\widehat{B}C > D\widehat{B}A = B\widehat{D}A > B\widehat{D}C.$$

(b) A e D pertencem a semiplanos opostos em relação a $\overleftrightarrow{BC}$ (cf. figura 2.20, à direita): como o triângulo ABD é isósceles de base BD, temos que $A\widehat{B}D < 90°$. Portanto, sendo E o ponto de interseção de $\overrightarrow{AB}$ com CD, segue que

$$D\widehat{B}C = D\widehat{B}E + E\widehat{B}C > D\widehat{B}E = 180° - D\widehat{B}A > 90°.$$

Mas, como um triângulo só pode ter um ângulo obtuso, segue que $D\widehat{B}C > B\widehat{C}D$. ■

A proposição a seguir é o resultado principal desta seção, sendo conhecida como a **desigualdade triangular**.

Proposição 2.26. Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Prova. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Mostremos que $a < b+c$, sendo a prova das demais desigualdades totalmente análoga. Marque (cf. figura 2.21) o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ tal que $A \in CD$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$.

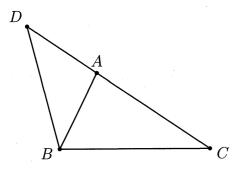



Figura 2.21: a desigualdade triangular.

Uma vez que

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c,$$

pela proposição 2.23 é suficiente mostrarmos que $B\widehat{D}C < D\widehat{B}C$. Mas, desde que $B\widehat{D}A = D\widehat{B}A$, basta observarmos que

$$B\widehat{D}C = B\widehat{D}A = D\widehat{B}A < D\widehat{B}A + A\widehat{B}C = D\widehat{B}C.$$

■

Sendo a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo, segue da desigualdade triangular que

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

Reciprocamente, dados segmentos cujos comprimentos a, b e c satisfazem as desigualdades acima, não é difícil provar que é sempre possível construirmos um triângulo tendo tais segmentos como lados.

Terminamos esta seção colecionando duas consequências interessantes da desigualdade triangular.

Exemplo 2.27. Se P é um ponto situado no interior de um triângulo ABC, então:

(a) $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

(b) $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$.

Prova.

(a) Prolongue a semirreta $\overrightarrow{BP}$ até que a mesma encontre o lado AC no ponto Q (cf. figura 2.22). Aplicando a desigualdade triangular sucessivamente aos triângulos CPQ e ABQ, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{PB} + \overline{PC} &< \overline{PB} + (\overline{PQ} + \overline{CQ}) = \overline{BQ} + \overline{CQ}\\ &< (\overline{AB} + \overline{AQ}) + \overline{CQ} = \overline{AB} + \overline{AC}.\end{aligned}$$

(b) Argumentando de modo análogo à prova do item (a), temos $\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{BC}$ e $\overline{PA} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Somando ordenadamente essas duas desigualdades com aquela do item (a), obtemos

$$2(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}) < 2(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}).$$

■

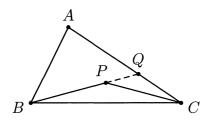



Figura 2.22: consequências da desigualdade triangular.

Exemplo 2.28. Na figura 2.23, construa com régua e compasso o ponto $P \in r$ para o qual a soma $\overline{PA} + \overline{PB}$ seja a menor possível.

Solução. Se A' é o simétrico de A em relação a r (cf. problema 4, página 44), afirmamos que o ponto P desejado é o ponto de interseção de $A'B$ com r. Para provar este fato, seja Q outro ponto qualquer

Figura 2.23: menor percurso que toca uma reta.

de r. (Faça uma figura para acompanhar o raciocínio.) O fato de A' ser o simétrico de A em relação a r garante que $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$ e, analogamente, $\overline{AP} = \overline{A'P}$. (Prove isto!) Tais igualdades, juntamente com a desigualdade triangular, fornecem sucessivamente

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} = \overline{A'B} \\ &< \overline{A'Q} + \overline{BQ} = \overline{AQ} + \overline{BQ}. \end{aligned}$$

■

Problemas – Seção 2.4

1. Se dois lados de um triângulo isósceles medem 38cm e 14cm, calcule seu perímetro.

2. Encontre o intervalo de variação de x no conjunto dos reais, sabendo que os lados de um triângulo são expressos em centímetros por $x + 10$, $2x + 4$ e $20 - 2x$.

3. Em um triângulo ABC, o lado AB tem por comprimento um número inteiro de centímetros. Calcule o maior valor possível para $\overline{AB}$, sabendo que $\overline{AC} = 27$cm, $\overline{BC} = 16$cm e que $\widehat{C} < \widehat{A} < \widehat{B}$.

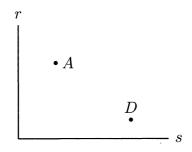
4. Em um triângulo ABC, escolhemos aleatoriamente pontos $P \in BC$, $Q \in AC$ e $R \in AB$, todos diferentes dos vértices de ABC. Prove que o perímetro do triângulo PQR é menor que o perímetro do triângulo ABC.

5. Se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que $|b - c| < a$.

6. (Torneio das Cidades.) Se a, b, c são os comprimentos dos lados de um triângulo, prove que $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

7. Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, prove que o ponto P do plano para o qual a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ é mínima é o ponto de concurso das diagonais de $ABCD$.

8. Seja $n \geq 3$ um inteiro dado. Prove que, em todo $n-$ágono convexo, o comprimento de cada lado é menor que a soma dos comprimentos de $n-1$ lados restantes.

9. Na figura abaixo, as semirretas r e s são perpendiculares. Construa com régua e compasso os pontos $B \in r$ e $C \in s$ para os quais a soma $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ seja a menor possível.

10. Seja ABC um triângulo retângulo em B e tal que $\overline{AB} > \overline{BC}$. Dado um ponto P no interior de ABC, prove que $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

11. * Seja ABC um triângulo equilátero de lado l. Se P e Q são pontos situados respectivamente sobre AB e AC, distintos dos vértices de ABC, prove que $\overline{BQ} + \overline{PQ} + \overline{CP} > 2l$.

12. (União Soviética). Em um país, certo dia, um avião partiu de cada cidade com destino à cidade mais próxima. Se as distâncias entre as cidades são duas a duas distintas, prove que em nenhuma cidade aterrissaram mais de cinco aviões.

2.5 Quadriláteros notáveis

Iniciamos, nesta seção, o estudo sistemático da geometria dos quadriláteros. Dentre os vários tipos particulares de quadriláteros que

vamos considerar aqui, os principais são, certamente, os *paralelogramos*, qualificados na definição a seguir.

Definição 2.29. Um quadrilátero convexo é um **paralelogramo** se possuir lados opostos paralelos.

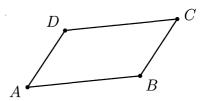



Figura 2.24: $ABCD$ paralelogramo $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

No que segue, vamos enunciar várias maneiras equivalentes de definir paralelogramos. O leitor deve guardar tais resultados como propriedades notáveis dessa classe de quadriláteros, a serem usadas oportunamente.

Proposição 2.30. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus ângulos opostos forem iguais.

Prova. Suponha, primeiro, que o quadrilátero convexo $ABCD$ é um paralelogramo (figura 2.24). Então $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e, como os ângulos $\angle A$ e $\angle B$ do paralelogramo são colaterais internos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$. Analogamente, $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ e, daí, $\widehat{A} = 180° - \widehat{B} = \widehat{C}$. Do mesmo modo, $\widehat{B} = \widehat{D}$.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$ (figura 2.25). Então $\widehat{A}+\widehat{B} = \widehat{C}+\widehat{D}$ e, como $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D} = 360°$ (cf. problema 11, página 56), temos $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{D} = 180°$. Analogamente, $\widehat{A}+\widehat{D} = \widehat{B}+\widehat{C} = 180°$. Agora, como $\widehat{A}+\widehat{B} = 180°$, o corolário 2.18 garante que $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Da mesma forma, $\widehat{B}+\widehat{C} = 180°$

nos dá $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, de maneira que $ABCD$ tem lados opostos paralelos, i.e., é um paralelogramo.

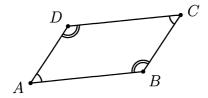



Figura 2.25: $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D} \Rightarrow ABCD$ paralelogramo.

■

Proposição 2.31. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem iguais.

Prova. Suponha, primeiro, que o quadrilátero convexo $ABCD$ é um paralelogramo (figura 2.26). Então, já sabemos que $\widehat{A} = \widehat{C}$. Por outro lado, como $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, temos $A\widehat{D}B = C\widehat{B}D$. Portanto, os triângulos ABD e CDB são congruentes por LAAo e segue, daí, que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.

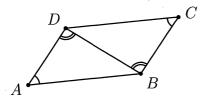



Figura 2.26: $ABCD$ paralelogramo $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$ (figura 2.27). Então, os triângulos ABD e CDB são congruentes por LLL, donde segue que $A\widehat{D}B = C\widehat{B}D$ e $A\widehat{B}D = C\widehat{D}B$. Mas tais igualdades, juntamente com o corolário 2.18, acarretam em $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. ■

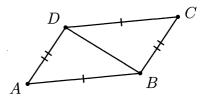



Figura 2.27: $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow ABCD$ paralelogramo.

A proposição anterior nos permite apresentar uma construção simples da paralela a uma reta dada por um ponto fora da mesma, conforme ensina o exemplo a seguir.

Exemplo 2.32. Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, construa com régua e compasso a reta paralela a r e passando por A.

Solução.

A

r

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Com o compasso centrado em A, trace um círculo α, que intersecte a reta r nos pontos distintos B e C.

2. Ainda com o compasso centrado em A, trace o círculo β de raio igual a $\overline{BC}$.

3. Com o compasso centrado em C, trace o círculo γ de raio igual ao raio de α.

4. Marque o ponto D de interseção de β e γ, situado no mesmo semiplano que A em relação à reta r.

5. Pela proposição anterior, $ABCD$ é um paralelogramo; portanto, a reta $\overleftrightarrow{AD}$ é paralela à reta r.

■

Os dois exemplos a seguir trazem aplicações úteis da construção delineada no exemplo acima.

Exemplo 2.33. Construa com régua e compasso um paralelogramo, conhecendo os comprimentos a e b de seus lados e o ângulo α entre dois de seus lados.

Solução.

a b α

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace uma reta r e marque sobre a mesma um segmento AB de comprimento igual a b.

2. Construa um ângulo $\angle BAX$, de medida igual a α.

3. Marque, sobre a semirreta $\overrightarrow{AX}$, o ponto D tal que $\overline{AD} = a$.

4. Trace por D a paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ e por B a paralela a $\overleftrightarrow{AD}$; em seguida, marque o ponto C de interseção das duas retas traçadas.

5. $ABCD$ é, claramente, um paralelogramo que satisfaz as condições do enunciado.

■

Exemplo 2.34. Construa o triângulo ABC, dados o comprimento a do lado BC e as medidas α e β, respectivamente dos ângulos internos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$.

Solução.

a α β

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace uma reta r e marque, sobre a mesma, um segmento BC de comprimento igual a a.

2. Construa um ângulo $\angle CBX$, de medida igual a β.

3. Construa o ângulo $\angle BXY$, de medida igual a α e tal que Y esteja situado no mesmo semiplano que C em relação à reta $\overleftrightarrow{BX}$.

4. Trace, pelo ponto C, a paralela à reta $\overleftrightarrow{XY}$; em seguida, marque A como o ponto de interseção dessa paralela com a reta $\overleftrightarrow{BX}$.

■

Voltando à discussão geral de paralelogramos, o resultado a seguir traz mais uma caracterização útil desses quadriláteros.

Proposição 2.35. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.

Prova. Primeiramente, seja $ABCD$ um paralelogramo e M o ponto de interseção de suas diagonais (figura 2.28). De $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, segue que $B\widehat{A}M = D\widehat{C}M$ e $A\widehat{B}M = C\widehat{D}M$. Como já sabemos que $\overline{AB} = \overline{CD}$, segue que os triângulos ABM e CDM são congruentes por ALA. Logo, $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$.

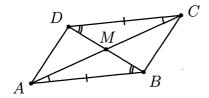



Figura 2.28: $ABCD$ paralelogramo $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$.

Reciprocamente (veja, ainda, a figura 2.28), seja $ABCD$ um quadrilátero tal que suas diagonais AC e BD se intersectam em M, o ponto médio de ambas. Então, $\overline{MA} = \overline{MC}$, $\overline{MB} = \overline{MD}$ e $A\widehat{M}B = C\widehat{M}D$ (ângulos OPV), de modo que os triângulos ABM e CDM são congruentes, por LAL. Analogamente, BCM e DAM também são congruentes por LAL. Tais congruências nos dão, respectivamente, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$, o que já sabemos ser equivalente ao fato de $ABCD$ ser paralelogramo. ∎

Para o que segue, definimos uma **base média** de um triângulo como um segmento que une os pontos médios de dois de seus lados. Assim, todo triângulo possui *exatamente três* bases médias. Nas notações da figura 2.29, as bases médias do triângulo ABC são os segmentos MN, NP e MP. Dizemos, ainda, que MN é a base média

relativa ao vértice A (ou ao lado BC); analogamente, NP e MP são, respectivamente, as bases médias de ABC relativas aos vértices B e C (ou aos lados AB e AC, também respectivamente). Por fim, o triângulo MNP (i.e., o triângulo que tem por lados as bases médias do triângulo ABC) é o **triângulo medial** de ABC.

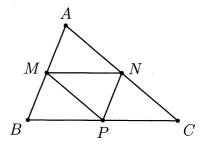



Figura 2.29: bases médias de um triângulo.

As propriedades de paralelogramos obtidas anteriormente nos permitem provar, na proposição a seguir, um importante resultado sobre as bases médias de um triângulo, conhecido como o **teorema da base média**.

Proposição 2.36. Seja ABC um triângulo qualquer. Se MN é a base média de ABC relativa a BC, então $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Reciprocamente, se pelo ponto médio M do lado AB traçarmos a paralela ao lado BC, então tal reta intersecta o lado AC em seu ponto médio N. Ademais, em um qualquer dos casos acima, temos

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

Prova. Para a primeira parte, nas notações da figura 2.30, tome M' sobre $\overrightarrow{MN}$ tal que $\overline{MN} = \overline{NM'}$. Como N é o ponto médio de AC e $A\widehat{N}M = C\widehat{N}M'$ (ângulos OPV), os triângulos AMN e $CM'N$ são congruentes por LAL. Portanto, $\overline{M'C} = \overline{MA}$ e $M'\widehat{C}N = M\widehat{A}N$,

donde segue (via corolário 2.18) que $\overleftrightarrow{M'C} \parallel \overleftrightarrow{AM}$. Assim,

$$\overleftrightarrow{BM} = \overleftrightarrow{AM} = \overleftrightarrow{M'C} \text{ e } \overleftrightarrow{BM} = \overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{M'C}.$$

Tendo dois lados opostos iguais e paralelos, o problema 1, página 85 garante que o quadrilátero $MBCM'$ é um paralelogramo. Mas, como em todo paralelogramo os lados opostos são iguais e paralelos, temos

$$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{MM'} = \overleftrightarrow{MN} \text{ e } \overline{BC} = \overline{MM'} = 2\,\overline{MN}.$$

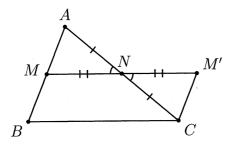



Figura 2.30: medida da base média de um triângulo.

Reciprocamente, seja r a reta que passa pelo ponto médio M do lado AB e é paralela ao lado BC. Como $\overleftrightarrow{MN}$ também passa por M e é paralela a BC, segue do quinto postulado de Euclides (postulado 2.17) que r coincide com $\overleftrightarrow{MN}$; em particular, $N \in r$. ∎

O exemplo a seguir traz uma primeira aplicação do teorema da base média.

Exemplo 2.37. Construa o triângulo ABC, conhecidas as posições dos pontos médios M, N e P dos lados BC, CA e AB, respectivamente.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Trace por M a reta r, paralela à reta $\overleftrightarrow{NP}$.
2. Trace por N a reta s, paralela à reta $\overleftrightarrow{MP}$.
3. Trace por P a reta t, paralela à reta $\overleftrightarrow{MN}$.
4. De acordo com a proposição anterior, temos $s \cap t = \{A\}$, $r \cap t = \{B\}$ e $r \cap s = \{C\}$.

∎

Para o que segue, recorde que uma *mediana* de um triângulo é um segmento que une um vértice do mesmo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice. Evidentemente, todo triângulo possui, exatamente, três medianas. Por outro lado, como aplicação do teorema da base média e das propriedades de paralelogramos, mostraremos, na proposição a seguir, que as medianas de um triângulo intersectam-se em um único ponto, denominado o *baricentro* do triângulo.

Proposição 2.38. Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, o **baricentro** do triângulo. Ademais, o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão $2:1$.

Prova. Sejam N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AC e AB, e seja $BN \cap CP = \{G_1\}$ (figura 2.31). Sejam, ainda, S e T os pontos médios dos segmentos BG_1 e CG_1, respectivamente.

Observe, agora, que NP é base média de ABC relativa a BC e ST é base média de BCG_1 relativa a BC; logo, pelo teorema da base média, tanto NP quanto ST são paralelos a BC e têm comprimento igual à metade de $\overline{BC}$. Portanto, $\overline{NP} = \overline{ST}$ e $\overleftrightarrow{NP} \| \overleftrightarrow{ST}$, de modo que, novamente pelo problema 1, página 85, $NPST$ é um paralelogramo. Segue, pois, da proposição 2.35 que $\overline{PG_1} = \overline{G_1T}$ e $\overline{NG_1} = \overline{G_1S}$. Mas, como $\overline{BS} = \overline{SG_1}$ e $\overline{CT} = \overline{TG_1}$, segue que $\overline{BS} = \overline{SG_1} = \overline{G_1N}$ e $\overline{CT} = \overline{TG_1} = \overline{G_1P}$, igualdades que, por sua vez, fornecem $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1N}$ e $\overline{CG_1} = 2\overline{G_1P}$.

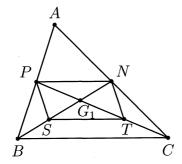



Figura 2.31: as medianas e o baricentro.

Agora, se M for o ponto médio de BC e G_2 for o ponto de interseção das medianas AM e BN, concluímos, analogamente, que G_2 divide AM e BN na razão $2:1$ a partir de cada vértice. Mas, daí, segue que os pontos G_1 e G_2 são tais que $\overline{BG_1} = 2\overline{G_1N}$ e $\overline{BG_2} = 2\overline{G_2N}$; isso implica, claramente, em $G_1 \equiv G_2$. Por fim, chamando de G o ponto $G_1 \equiv G_2$, segue que AM, BN e CP concorrem em G e que G divide cada uma das medianas na razão $2:1$, a partir do vértice correspondente. ∎

Doravante, salvo menção em contrário, denotaremos o baricentro de um triângulo ABC por G. O baricentro de um triângulo é um de

seus *pontos notáveis*; os demais (*circuncentro*, *incentro* e *ortocentro*) serão estudados na seção 3.2.

Conforme observamos anteriormente, o problema 1, página 85, garante que um quadrilátero com dois lados opostos paralelos *e iguais* é um paralelogramo. Pode ocorrer, entretanto, que saibamos somente que dois lados opostos de um quadrilátero são paralelos, podendo ou não ser iguais. Neste caso, dizemos que tal quadrilátero é um **trapézio** (figura 2.32). Assim, todo paralelogramo é, em particular, um trapézio, mas é fácil nos convencermos de que a recíproca *não é* verdadeira.

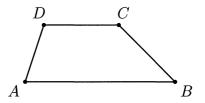



Figura 2.32: um trapézio $ABCD$, com $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

Em todo trapézio, os dois lados sabidamente paralelos são suas **bases**, sendo o maior (resp. menor) deles a **base maior** (resp. **base menor**); os outros dois lados (sobre os quais em princípio nada sabemos, mas que podem também ser paralelos, caso o trapézio seja, em particular, um paralelogramo) são os **lados não paralelos**[6] do trapézio. Nas notações da figura 2.32, AB e CD são as bases e BC e AD os lados não paralelos do trapézio $ABCD$.

[6]Essa nomenclatura é bastante infeliz, uma vez que sugere que, ao considerarmos um paralelogramo como trapézio, chamemos os outros dois lados de não paralelos, violando assim a própria definição de paralelogramo! Entretanto, nos ateremos a ela pelo fato de a mesma ser consagrada pelo uso. Na prática, tal convenção não resultará em confusão, uma vez que, o mais das vezes, os trapézios que consideraremos aqui não serão paralelogramos.

Ao lidarmos com problemas envolvendo construções geométricas em um trapézio $ABCD$, como o da figura 2.32, é frequentemente útil observarmos (cf. figura 2.33) que, se E e F são os pontos sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que $ADCE$ e $BDCF$ são paralelogramos, então:

i. O triângulo BCE é tal que $\overline{BE} = \overline{AB} - \overline{CD}$, $\overline{CE} = \overline{AD}$ e $B\widehat{C}E$ = ângulo entre as retas suportes dos lados não paralelos AD e BC.

ii. O triângulo ACF é tal que $\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{CD}$, $\overline{CF} = \overline{BD}$ e $A\widehat{C}F$ = ângulo entre as diagonais AC e BD.

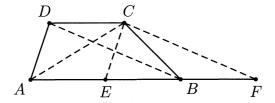
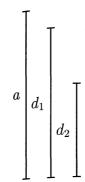



Figura 2.33: paralelogramos associados ao trapézio $ABCD$.

Utilizaremos a discussão acima no exemplo a seguir.

Exemplo 2.39. Construa um trapézio $ABCD$, de bases AB e CD, sabendo que as diagonais AC e BD formam um ângulo de 135° uma com a outra e conhecendo os comprimentos $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = d_1$ e $\overline{BD} = d_2$.

Solução.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Inspirado pela figura 2.33, construa um triângulo ACF tal que $\overline{AC} = d_1$, $\overline{CF} = d_2$ e $A\widehat{C}F = 135°$.
2. Marque o ponto B sobre a semirreta $\overrightarrow{AE}$, tal que $\overline{AB} = a$.
3. Trace, por B, a reta r paralela à reta $\overleftrightarrow{CF}$ e, por C, a reta s paralela à reta $\overleftrightarrow{AF}$.
4. Marque D como o ponto de interseção das retas r e s.

■

Antes de prosseguir, precisamos de mais algumas convenções acerca de trapézios, quais sejam: o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é a **base média** do mesmo, ao passo que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é sua **mediana de Euler**[7]. A proposição a seguir nos ensina como calcular os comprimentos de tais segmentos em termos dos comprimentos das bases do trapézio.

Proposição 2.40. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC. Sejam, ainda, M e N os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC, respectivamente, e P e Q os

[7]Após Leonhard Euler, matemático suíço do século XVIII.

pontos médios das diagonais AC e BD, também respectivamente (cf. figura 2.34). Então:

(a) M, N, P e Q são colineares e $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$.

(b) $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$ e $\overline{PQ} = \frac{1}{2}|\overline{AB} - \overline{CD}|$.

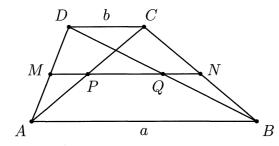



Figura 2.34: base média e mediana de Euler de um trapézio.

Prova. Nas notações da figura 2.34, como MP é base média do triângulo DAC, segue da proposição 2.36 que $\overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e $\overline{MP} = \frac{b}{2}$. Por outro lado, como MQ é base média do triângulo ADB, a proposição 2.36 também nos diz que $\overleftrightarrow{MQ} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{MQ} = \frac{a}{2}$. Mas, como $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, segue do quinto postulado de Euclides que $\overleftrightarrow{MP} = \overleftrightarrow{MQ}$, i.e., M, P e Q são colineares. Ademais,

$$\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{MP} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Agora, argumentando analogamente com as bases médias NQ e NP dos triângulos CBD e ABC, respectivamente, concluímos que P, Q e N são colineares e $\overline{NQ} = \frac{b}{2}$. Portanto, segue do que fizemos acima que

$$\overline{MN} = \overline{MQ} + \overline{NQ} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

■

A fim de completar nosso estudo dos tipos particulares mais elementares de quadriláteros, vamos estudar, agora, *retângulos* e *losangos*. Um quadrilátero (convexo, como sempre) é um **retângulo** se todos os seus ângulos internos forem iguais. Como, pelo problema 11, página 56, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a 360°, segue que um quadrilátero é um retângulo se, e só se, todos os seus ângulos internos forem iguais a 90°. Um quadrilátero é um **losango** se todos os seus lados forem iguais. A figura 2.35 mostra exemplos de um retângulo e de um losango.

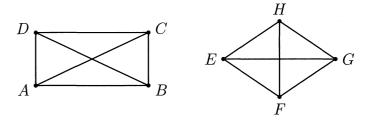



Figura 2.35: o retângulo $ABCD$ e o losango $EFGH$.

Como os lados opostos de um retângulo são sempre paralelos (uma vez que são ambos perpendiculares a um qualquer dos outros dois lados), *todo retângulo é um paralelogramo*. Por outro lado, a proposição 2.31 garante que *todo losango também é um paralelogramo*.

A discussão acima permite definir a distância entre duas retas paralelas. Para tanto, observe, inicialmente, que se r e s são retas paralelas, então (cf. corolário 2.18) uma reta t é perpendicular a r se, e só se, for perpendicular a s.

Definição 2.41. Se r e s são retas paralelas, a **distância** entre r e s é o comprimento de qualquer segmento PQ tal que $P \in r$, $Q \in s$ e $\overleftrightarrow{PQ} \perp r, s$.

Para ver que a definição acima tem sentido, tome $P, P' \in r$ e sejam $Q, Q' \in s$ tais que $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{P'Q'} \perp r$ (cf. figura 2.36). Então, $PQQ'P'$ é

um quadrilátero com quatro ângulos iguais a 90°, logo um retângulo. Portanto, $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

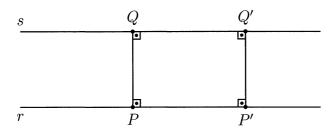



Figura 2.36: distância entre duas paralelas.

Ainda em relação à definição anterior, o exemplo a seguir mostra como construir as paralelas a uma reta r dada e situadas a uma distância de r também dada.

Exemplo 2.42. Construa com régua e compasso as retas paralelas à reta r e situadas à distância d de r.

Solução.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Marque um ponto A sobre r e construa, por A, a reta $t \perp r$.

2. Marque sobre t os pontos B e B' tais que $\overline{AB} = \overline{AB'} = d$.

3. Trace, por B e B', respectivamente as retas s e s', paralelas à reta r. As retas s e s' são as retas desejadas.

■

Voltando à discussão geral de retângulos e losangos, colecionamos nas proposições 2.43 e 2.46 a seguir caracterizações úteis de tais quadriláteros.

Proposição 2.43. Um paralelogramo é um retângulo se, e só se, suas diagonais tiverem comprimentos iguais.

Prova. Se $ABCD$ é um retângulo de diagonais AC e BD (figura 2.35), então $D\widehat{A}B = A\widehat{D}C = 90°$ e (por $ABCD$ também ser paralelogramo) $\overline{AB} = \overline{DC}$. Mas, como os triângulos DAB e ADC partilham o lado AD, os mesmos são congruentes por LAL. Em particular, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Reciprocamente, suponha que $ABCD$ é um paralelogramo tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$ (figura 2.37). Como também temos $\overline{AB} = \overline{DC}$, os triân-

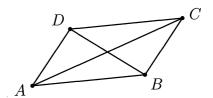



Figura 2.37: $ABCD$ paralelogramo tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$.

gulos DAB e ADC (que partilham o lado AD) são novamente congruentes, agora por LLL. Logo, $D\widehat{A}B = A\widehat{D}C$. Mas, uma vez que $ABCD$ é um paralelogramo, temos $D\widehat{A}B + A\widehat{D}C = 180°$ e, daí, $D\widehat{A}B = A\widehat{D}C = 90°$. Analogamente, $A\widehat{B}C = D\widehat{C}B = 90°$ e $ABCD$ é um retângulo. ■

O corolário a seguir traz uma consequência extremamente útil da proposição anterior.

Corolário 2.44. A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da mesma.

Prova. Seja ABC um triângulo retângulo em A (figura 2.38). Trace, por B, a paralela a AC e, por C, a paralela a AB; seja, ainda, D o ponto de interseção de tais retas. Como $B\widehat{A}C + A\widehat{B}D = 180°$ e $B\widehat{A}C =$

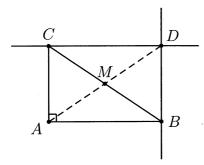



Figura 2.38: a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo.

$90°$, segue que $A\widehat{B}D = 90°$. Analogamente, $A\widehat{C}D = 90°$ e, como a soma dos ângulos de $ABDC$ é $360°$, segue, daí, que $B\widehat{D}C = 90°$. Portanto, o quadrilátero $ABDC$ é um retângulo, donde $\overline{AD} = \overline{BC}$ e o ponto M de interseção de AD e BC é o ponto médio de ambos tais segmentos. Logo, $\overline{BC} = \overline{AD} = 2\,\overline{AM}$. ■

Exemplo 2.45. Construa um triângulo retângulo ABC, conhecendo os comprimentos m e h, respectivamente da mediana e da altura relativas à hipotenusa BC.

Solução.

m h

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. De acordo com o corolário anterior, temos $\overline{BC} = 2m$. Construa, pois, um tal segmento BC e marque seu ponto médio M.

2. Trace (cf. exemplo 2.42) uma reta r, paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e situada à distância h de r.

3. Obtenha as possíveis posições do vértice A como os pontos de interseção da reta r com o círculo de centro M e raio m.

■

Voltemo-nos, agora, à caracterização prometida dos losangos.

Proposição 2.46. Um paralelogramo é um losango se, e só se, tiver diagonais perpendiculares.

Prova. Suponha, primeiro, que $EFGH$ é um losango de diagonais EG e FH (figura 2.35). Como $\overline{EF} = \overline{EH}$ e $\overline{GF} = \overline{GH}$, os triângulos EFG e EHG são congruentes por LLL. Portanto, sendo M o ponto de interseção das diagonais EG e FH, temos

$$F\widehat{E}M = F\widehat{E}G = H\widehat{E}G = H\widehat{E}M.$$

Assim, EM é bissetriz do ângulo $\angle FEH$ do triângulo EFH, o qual é isósceles de base FH, e o problema 8, página 45, garante que EM também é altura relativa a FH. Logo, $\overleftrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{EM} = \overleftrightarrow{EG}$.

Reciprocamente, seja $EFGH$ um paralelogramo de diagonais perpendiculares EG e FH (figura 2.39). Como EG e FH se intersectam no ponto médio M de ambas (pois $EFGH$ é paralelogramo), segue que, no triângulo EHG, o segmento HM é mediana e altura relativamente ao lado EG. Portanto, pelo problema 9, página 45, temos que $\overline{EH} = \overline{GH}$. Mas, como $\overline{EH} = \overline{FG}$ e $\overline{EF} = \overline{GH}$, nada mais há a fazer. ■

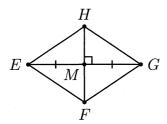



Figura 2.39: $EG \perp FH \Rightarrow EFGH$ losango.

Há um último tipo de quadrilátero que desejamos estudar, o *quadrado*. Um quadrilátero é um **quadrado** quando for simultaneamente um retângulo e um losango (figura 2.40). Assim, quadrados

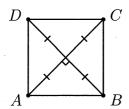



Figura 2.40: o quadrado $ABCD$.

são quadriláteros de ângulos e lados iguais; ademais, suas diagonais são também iguais e perpendiculares, se intersectam ao meio e formam ângulos de 45° com os lados do quadrilátero. (Prove esta última afirmação!)

Observação 2.47. Sejam $\mathcal{T}$ o conjunto dos trapézios, $\mathcal{P}$ o conjunto dos paralelogramos, $\mathcal{R}$ o conjunto dos retângulos, $\mathcal{L}$ o conjunto dos losangos e $\mathcal{Q}$ o conjunto dos quadrados. Segue do que vimos nesta seção que

$$\begin{cases} \mathcal{R} \cup \mathcal{L} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{T} \\ \mathcal{R} \cap \mathcal{L} = \mathcal{Q} \end{cases},$$

todas as inclusões sendo estritas.

Problemas – Seção 2.5

1. * Se dois segmentos são iguais e paralelos, prove que suas extremidades são os vértices de um paralelogramo.

2. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Mostre que os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo.

3. Uma reta r passa pelo baricentro G de um triângulo ABC e deixa o vértice A de um lado e os vértices B e C do outro. Prove que a soma das distâncias de B e C à reta r é igual à distância de A a r.

4. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecendo os comprimentos a do lado BC, bem como os comprimentos m_a e m_b, respectivamente das medianas relativas aos lados BC e AC.

5. Prove que, em todo triângulo, a soma dos comprimentos das medianas é menor que $\frac{3}{2}$ do perímetro e maior que $\frac{3}{4}$ do perímetro do triângulo.

6. (Inglaterra.) Considere um círculo de centro O e diâmetro AB. Prolongue uma corda qualquer AP até um ponto Q, tal que P seja o ponto médio de AQ. Se $OQ \cap BP = \{R\}$, calcule a razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{RO}$.

7. Seja $ABCD$ um trapézio de bases $\overline{AB} = 7$cm e $\overline{CD} = 3$cm e lados não paralelos AD e BC. Se $\widehat{A} = 43°$ e $\widehat{B} = 47°$, calcule a distância entre os pontos médios das bases do trapézio.

8. São dados no plano um paralelogramo $ABCD$, de diagonais AC e BD, e uma reta r não intersecta $ABCD$. Sabendo que as distâncias dos pontos A, B e C à reta r são respectivamente iguais a 2, 3 e 6 centímetros, calcule a distância de D a r.

9. As bases AB e CD de um trapézio têm comprimentos a e b, respectivamente, com $a > b$. Se os lados não paralelos são AD e BC e $\angle BCD = 2\angle DAB$, prove que $\overline{BC} = a - b$.

10. Seja $ABCD$ um trapézio no qual o comprimento da base maior AB é igual ao comprimento da base menor CD somado ao comprimento do lado não paralelo BC. Se o ângulo em A medir 70°, calcule o ângulo C.

11. Construa com régua e compasso um trapézio, conhecidos os comprimentos a e b de suas bases, e c e d de seus lados não paralelos.

12. * (OCM.) Um triângulo ABC é retângulo em A e tal que $\overline{BC} = 2\,\overline{AB}$. Calcule as medidas em graus de seus ângulos.

13. Em um triângulo ABC, sejam M o ponto médio do lado BC e H_b e H_c, respectivamente, os pés das alturas relativas a AC e AB. Prove que o triângulo MH_bH_c é isósceles.

14. Sejam $ABCD$ um quadrado de diagonais AC e BD e E um ponto sobre o lado CD, tal que $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CE}$. Sendo F o ponto médio do lado CD, prove que $E\widehat{A}B = 2 \cdot F\widehat{A}D$.

15. (Torneio das Cidades.) Sejam $ABCD$ um retângulo de diagonais AC e BD e M, N, P e Q pontos situados respectivamente sobre os lados AB, BC, CD e AD, todos distintos dos vértices do retângulo. Mostre que o perímetro do quadrilátero $MNPQ$ é maior ou igual que o dobro da diagonal do retângulo. Quando a igualdade ocorre?

16. * (Hungria.) Em um triângulo ABC, sejam M o ponto médio do lado BC e P o pé da perpendicular baixada de B à bissetriz interna relativa ao vértice A. Prove que

$$\overline{PM} = \frac{1}{2}|\,\overline{AB} - \overline{AC}|.$$

CAPÍTULO 3

Lugares Geométricos

O conceito de lugar geométrico, desenvolvido neste capítulo, resulta essencial para uma compreensão mais profunda da abordagem aqui desenvolvida da Geometria Euclidiana, usualmente conhecida como o *método sintético*. De posse de tal noção, estaremos aptos a discutir várias propriedades notáveis de triângulos e quadriláteros, ressaltando-se, dentre elas, o problema de inscritibilidade dos mesmos em círculos.

3.1 Lugares geométricos básicos

Começamos esta seção apresentando o conceito de *lugar geométrico*, na definição a seguir.

Definição 3.1. Dada uma propriedade $\mathcal{P}$ relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico** (abreviamos **LG**) dos pontos que possuem a propriedade $\mathcal{P}$ é o subconjunto $\mathcal{L}$ do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

(a) Todo ponto de $\mathcal{L}$ possui a propriedade $\mathcal{P}$.

(b) Todo ponto do plano que possui a propriedade $\mathcal{P}$ pertence a $\mathcal{L}$.

Em outras palavras, $\mathcal{L}$ é o LG da propriedade $\mathcal{P}$ se $\mathcal{L}$ for constituído *exatamente* pelos pontos do plano que têm a propriedade $\mathcal{P}$, nem mais nem menos. No que segue, vamos estudar alguns lugares geométricos elementares, assim como algumas aplicações dos mesmos.

Exemplo 3.2. Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o LG dos pontos do plano que estão à distância r do ponto O é o círculo de centro O e raio r:

$$\overline{AO} = r \Longleftrightarrow A \in \Gamma(O; r).$$

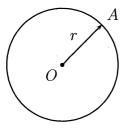



Figura 3.1: círculo como LG.

Exemplo 3.3. Conforme vimos no exemplo 2.42, o LG dos pontos do plano, situados à distância d de uma reta r é a união das retas s e s', paralelas a r e situadas, cada uma, à distância d de r.

Para o próximo exemplo, dados os pontos A e B no plano, definimos a **mediatriz** do segmento AB como sendo a reta perpendicular a AB e que passa por seu ponto médio.

Exemplo 3.4. Construa, com régua e compasso, a mediatriz do segmento AB dado a seguir.

Solução.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Com uma mesma abertura $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$, trace os círculos de raio r, centrados em A e em B; se X e Y são os pontos de interseção de tais círculos, então $\overleftrightarrow{XY}$ é a mediatriz de AB.

De fato, sendo M o ponto de interseção dos segmentos XY e AB, vimos no exemplo 2.10 que M é o ponto médio de AB. Por outro lado, como o triângulo XAB é isósceles de base AB e XM é mediana relativa à base, o problema 8, página 45, garante que XM também é altura de XAB. Portanto, $\overleftrightarrow{XY}$ passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular a AB, logo coincide com a mediatriz de AB. ■

A proposição a seguir caracteriza a mediatriz de um segmento como LG.

Proposição 3.5. Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é o LG dos pontos do plano que equidistam de A e de B.

Prova. Sejam M o ponto médio e m a mediatriz de AB (figura 3.2). Se $P \in m$, então, no triângulo PAB, PM é mediana e altura e, daí, o problema 9, página 45, garante que o triângulo PAB é isósceles de base AB. Logo, $\overline{PA} = \overline{PB}$.

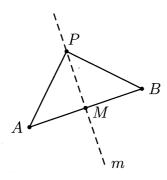



Figura 3.2: $P \in$ (mediatriz de AB) $\Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$.

Reciprocamente, seja P um ponto no plano tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$ (figura 3.3). Então, o triângulo PAB é isósceles de base AB, donde segue que a mediana e a altura relativas a AB coincidem. Mas, como a mediana de PAB relativa a AB é o segmento PM, segue que $PM \perp AB$, o que é o mesmo que dizer que $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz de AB. ■

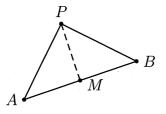



Figura 3.3: $\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow P \in$ (mediatriz de AB).

O papel da bissetriz de um ângulo como LG está essencialmente contido na proposição a seguir.

Proposição 3.6. Seja $\angle AOB$ um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então

$$d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO}) \Longleftrightarrow P \in \text{ (bissetriz de } \angle AOB).$$

Prova. Suponha, primeiro, que P pertence à bissetriz de $\angle AOB$ (figura 3.4) e sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P às retas $\overleftrightarrow{AO}$ e $\overleftrightarrow{BO}$. Os triângulos OMP e ONP são congruentes por LAAo, uma vez que $M\widehat{O}P = N\widehat{O}P$, $O\widehat{M}P = O\widehat{N}P = 90°$ e OP é lado comum aos mesmos. Daí, $\overline{PM} = \overline{PN}$, ou seja, $d(P, \overleftrightarrow{AO}) = d(P, \overleftrightarrow{BO})$.

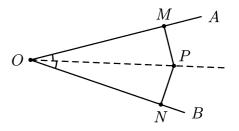



Figura 3.4: $P \in$ (bissetriz de $\angle AOB$) $\Rightarrow d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO})$.

Reciprocamente, seja P um ponto no interior do ângulo $\angle AOB$, tal que $\overline{PM} = \overline{PN}$, onde M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às retas $\overleftrightarrow{AO}$ e $\overleftrightarrow{BO}$. Então, os triângulos MOP e NOP são novamente congruentes, agora pelo caso CH (haja vista termos OP como hipotenusa comum e $\overline{PM} = \overline{PN}$ – veja o problema 1, página 54). Mas aí, $M\widehat{O}P = N\widehat{O}P$, de forma que P pertence à bissetriz de $\angle AOB$. ■

Exemplo 3.7. Dadas, no plano, retas r e s, concorrentes em O, vimos, na proposição anterior, que um ponto P do plano equidista de r e s se, e só se, P estiver sobre uma das retas que bissectam os ângulos formados por r e s (em negrito, na figura 3.5). Assim, o LG dos pontos do plano que equidistam de duas retas concorrentes é a união das bissetrizes dos ângulos formados por tais retas.

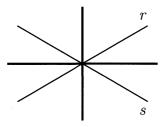



Figura 3.5: as bissetrizes de duas retas concorrentes como LG.

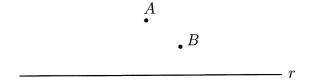
Após termos estudado os LG's mais básicos, vale a pena discorrermos um pouco sobre o problema geral da construção com régua e compasso de uma figura geométrica satisfazendo certas condições. De outro modo, o tratamento padrão para um tal problema consiste, basicamente, na execução dos dois passos seguintes:

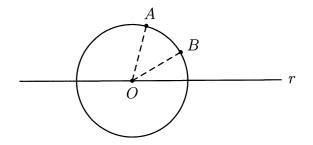
1. *Supor o problema resolvido*: construímos um esboço da figura possuidora das propriedades desejadas, identificando na mesma os dados do problema e os elementos que possam nos levar à solução.

2. *Construir os pontos-chave para a solução*: um **ponto-chave** é todo ponto que, uma vez construído, torna imediatas as construções subsequentes necessárias e, em última análise, a solução do problema em questão. Para construir o(s) ponto(s)-chave de um determinado problema, cumpre examinarmos as propriedades geométricas da situação em estudo com bastante cuidado, tentando identificar, em cada caso, dois LGs aos quais o ponto pertença. Devendo pertencer simultaneamente a dois LGs, o ponto fica determinado pelas interseções dos mesmos.

Vejamos, em um exemplo simples, como funciona a execução do programa acima.

Exemplo 3.8. Construa, com régua e compasso, um círculo passando pelos pontos A e B e tendo seu centro sobre a reta r.

Prova.

Descrição dos passos.

1. Supondo o problema resolvido, queremos um círculo como o da figura a seguir:

2. Nosso ponto-chave será o centro O do círculo, uma vez que, encontrada sua posição, bastará centrarmos o compasso nele, com abertura $\overline{OA}$, a fim de construir o círculo pedido. A fim de construir O, precisamos de dois LG's aos quais O pertença. Um deles é a própria reta r, pois é pedido que O pertença a r; por outro lado, como OA e OB são raios, temos $\overline{OA} = \overline{OB}$ e, assim, O também deve pertencer à mediatriz do segmento AB, que, por conseguinte, é nosso segundo LG.

Feita a análise acima, resta construir a mediatriz do segmento AB, obter sua interseção O com a reta r e, em seguida, traçar o círculo solução, que é aquele de centro O e raio $\overline{OA} = \overline{OB}$. ■

Problemas – Seção 3.1

1. Construa um círculo de raio dado r, que passe por dois pontos dados A e B. Sob que condições há solução?

2. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG do vértice A de um segmento AB, conhecida a posição do vértice B e o comprimento c de AB.

3. Construa com régua e compasso um triângulo ABC, conhecidos os comprimentos c do lado AB, a do lado BC e a medida α do ângulo $\angle BAC$.

4. Identifique o LG do vértice A do triângulo ABC, conhecidas as posições dos vértices B e C e o comprimento m_a da mediana relativa ao lado BC.

5. Identifique e construa com régua e compasso o LG dos pontos do plano equidistantes de duas retas paralelas dadas r e s.

6. Construa, com régua e compasso, o triângulo ABC, conhecidos os comprimentos $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e h_a da altura baixada a partir de A.

7. Construa o triângulo ABC conhecendo as retas concorrentes r e s, suportes dos lados AB e AC, respectivamente, e os comprimentos h_b e h_c das alturas respectivamente relativas aos vértices B e C.

8. São dados, no plano, uma reta r, um ponto $A \notin r$ e dois segmentos, de comprimentos a e b. Construa, com régua e compasso, todos os pontos B do plano tais que $\overline{AB} = a$ e $d(B, r) = b$. Sob que condições sobre a e b há solução?

9. Construa com régua e compasso um triângulo ABC, conhecidos os comprimentos a do lado BC, h_a da altura relativa a A e h_b da altura relativa a B.

10. São dados no plano uma reta r e um ponto A, com $A \notin r$. O ponto B varia em r. Encontre, com justificativa, o LG descrito pelo ponto médio do segmento AB.

11. Em uma folha de papel está desenhado um círculo α, mas seu centro não está marcado. Mostre como obter a posição do mesmo com régua e compasso.

12. Temos no plano do papel um círculo Γ, de centro O, e uma reta r que não intersecta Γ. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos pontos médios das cordas de Γ que são paralelas à reta r.

13. Construa o triângulo ABC, conhecendo o semiperímetro p do mesmo e as medidas β e γ dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente.

14. (Holanda.) É dado no plano um segmento AB e um ponto P sobre ele. De um mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$, construímos os triângulos retângulos isósceles APQ e BPR, de hipotenusas AP e BP, respectivamente. Em seguida, marcamos o ponto médio M do segmento QR. Encontre o LG descrito pelo ponto M, à medida que P varia sobre o segmento AB.

3.2 Pontos notáveis de um triângulo

Nesta seção, aplicamos o conceito de lugar geométrica para estudar mais alguns *pontos notáveis* de um triângulo, quais sejam, o *circuncentro*, o *ortocentro* e o *incentro*. Lembre-se, ainda, de que já definimos e estudamos as propriedades do baricentro na proposição 2.38.

Proposição 3.9. Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o **circuncentro** do mesmo.

Prova. Sejam ABC um triângulo qualquer, r, s e t, respectivamente, as mediatrizes dos lados BC, CA e AB, e O o ponto de interseção das retas r e s (figura 3.6).

Pela caracterização da mediatriz de um segmento como LG, temos $\overline{OB} = \overline{OC}$ (pois $O \in r$) e $\overline{OC} = \overline{OA}$ (pois $O \in s$). Portanto, $\overline{OB} = \overline{OA}$ e segue, novamente da caracterização da mediatriz como LG, que $O \in t$.

■

Exemplo 3.10. Construa, com régua e compasso, o circuncentro do triângulo ABC dado na figura abaixo.

Solução.

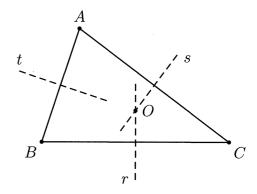
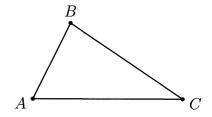



Figura 3.6: o circuncentro de um triângulo.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace as mediatrizes dos segmentos AB e AC.

2. O circuncentro de ABC é o ponto de interseção das mesmas.

■

Como corolário da discussão acima, podemos estudar o problema da concorrência das alturas de um triângulo. Note primeiro que, caso o triângulo seja obtusângulo (figura 3.7), as alturas que não partem do vértice do ângulo obtuso são exteriores ao mesmo.

Proposição 3.11. Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, o **ortocentro** do triângulo.

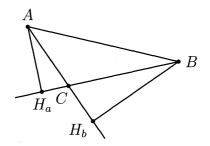



Figura 3.7: alturas de um triângulo obtusângulo.

Prova. Seja ABC um triângulo qualquer. Há três casos a considerar:

(a) ABC é retângulo (figura 3.8): suponhamos, sem perda de generalidade, que $B\widehat{A}C = 90°$. Então, A é o pé das alturas relativas aos lados AB e AC. Como a altura relativa ao lado BC passa (por definição) por A, segue que as alturas de ABC concorrem em A.

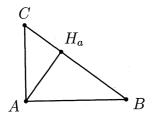



Figura 3.8: ortocentro de um triângulo retângulo.

(b) ABC é acutângulo (figura 3.9): trace, respectivamente por A, B e C, retas r, s e t paralelas a BC, CA e AB (também respectivamente), e sejam $r \cap s = \{P\}$, $s \cap t = \{M\}$, $t \cap r = \{N\}$. Então, os quadriláteros $ABCN$ e $ABMC$ são paralelogramos, de sorte que $\overline{CN} = \overline{AB} = \overline{CM}$ e, daí, C é o ponto médio de MN. Analogamente, B é o ponto médio de MP e A o ponto médio de NP.

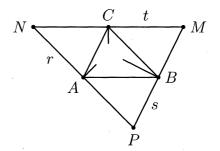



Figura 3.9: ortocentro de um triângulo acutângulo.

Por outro lado, a altura relativa a BC também é perpendicular a NP, já que $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{NP}$ são paralelas. Do mesmo modo, as alturas relativas a AC e AB são respectivamente perpendiculares a MP e MN. Segue que as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes dos lados do triângulo MNP. Mas já provamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, de modo que as alturas de ABC devem ser concorrentes.

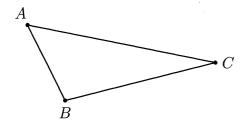
(c) ABC é obtusângulo: a prova é totalmente análoga à do caso (b). ∎

Coletamos, no corolário a seguir, uma consequência interessante da demonstração acima. Para o enunciado do mesmo, recorde (cf. discussão à página 71) que o *triângulo medial* de um triângulo ABC é aquele que tem por vértices os pontos médios dos lados de ABC.

Corolário 3.12. O circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.

Prova. Nas notações do item (b) na prova acima, ABC é o triângulo medial do triângulo MNP e as mediatrizes dos lados de MNP são as alturas de ABC; portanto, o circuncentro de MNP coincide com o ortocentro de ABC. Os demais casos são totalmente análogos. ∎

Exemplo 3.13. Construa, com régua e compasso, o ortocentro do triângulo ABC dado a seguir.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Trace a reta r, perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ e passando pelo vértice A.
2. Trace a reta s, perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ e passando pelo vértice B.
3. O ortocentro de ABC é o ponto de interseção das retas r e s.

■

Examinemos, por fim, o ponto de concurso das bissetrizes internas.

Proposição 3.14. As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, o **incentro** do triângulo.

Prova. Sejam r, s e t, respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ do triângulo ABC (figura 3.10) e I o ponto de interseção das retas r e s. Como $I \in r$, segue da caracterização das bissetrizes como LG, dada à proposição 3.6, que I equidista dos lados AB e AC de ABC. Analogamente, $I \in s$ garante que I equidista dos lados AB e BC. Portanto, I equidista de AC e BC e, usando novamente a referida caracterização das bissetrizes, concluímos que I pertence à bissetriz do ângulo $\angle C$, ou seja, à reta t. Assim, r, s e t concorrem em I. ■

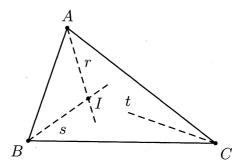
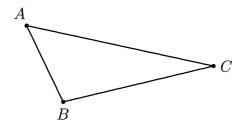



Figura 3.10: incentro de um triângulo.

Exemplo 3.15. Construa, com régua e compasso, o incentro do triângulo ABC dado a seguir.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Trace a semirreta $\overrightarrow{AX}$, bissetriz interna de ABC relativa ao vértice A.
2. Trace a semirreta $\overrightarrow{BY}$, bissetriz interna de ABC relativa ao vértice B.
3. O incentro de ABC é o ponto de interseção das semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$.

■

Terminamos esta seção com uma observação notacional importante: via de regra, ao estudarmos a geometria de um triângulo ABC, salvo menção em contrário denotaremos por G seu *baricentro*, por H seu *ortocentro*, por I seu *incentro* e por O seu *circuncentro*.

Problemas – Seção 3.2

1. De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C e do circuncentro O. Explique porque a posição do vértice A não fica determinada.

2. De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C e do incentro I. Construa, com régua e compasso, o vértice A.

3. De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C e do ortocentro H. Construa, com régua e compasso, o vértice A.

4. Numa folha de papel estão desenhadas duas retas concorrentes r e s. Ocorre que, devido ao tamanho da folha, o ponto de interseção de r e s não pode ser marcado no papel. Seja P um ponto no papel, tal que as perpendiculares baixadas de P respectivamente às retas r e s intersectem as retas s e r (também respectivamente) em pontos situados na folha do desenho. Mostre como construir, com régua e compasso, uma reta t, passando por P e concorrente simultaneamente com r e s.

5. Seja ABC um triângulo de ortocentro H, incentro I e circuncentro O. Mostre que ABC é equilátero se, e só se, dois quaisquer dos pontos H, I e O coincidirem.

3.3 Tangência e ângulos no círculo

Comecemos esta seção estudando uma das mais importantes noções da Geometria Euclidiana, qual seja, a de reta e círculos *tangentes*.

Dizemos que um círculo Γ e uma reta r são **tangentes** ou, ainda, que a reta r é tangente ao círculo Γ, se r e Γ tiverem *exatamente um* ponto P em comum. Nesse caso, P é denominado o **ponto de tangência** de r e Γ.

A proposição a seguir ensina como construir uma reta tangente a um círculo dado e passando por um ponto do mesmo.

Proposição 3.16. Sejam Γ um círculo de centro O e P um ponto de Γ. Se t é a reta que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$, então t é tangente a Γ.

Prova. Seja R o raio de Γ. Se $Q \neq P$ é outro ponto de t (figura 3.11), temos $\overline{QO} > \overline{PO} = R$, uma vez que $Q\widehat{P}O = 90°$ é o maior ângulo do triângulo OPQ. Portanto, $Q \notin \Gamma$ e, assim, P é o único ponto comum a t e a Γ. ∎

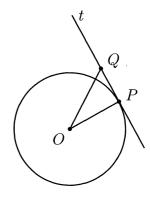
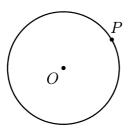



Figura 3.11: círculo e reta tangentes.

O próximo exemplo exercita a construção explicitada na demonstração acima.

Exemplo 3.17. Nas notações da figura abaixo, construa, com régua e compasso, uma reta r, tangente a Γ em P.

Solução.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace a reta $\overleftrightarrow{OP}$.

2. Construa, pelo ponto P, a reta r, perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$.

Não é difícil provar (cf. problema 1, página 120) que a reta tangente a um círculo Γ por um ponto P do mesmo é única. Por outro lado, se P for exterior ao círculo, provaremos na proposição 3.26 que há *exatamente duas* retas tangentes a Γ e passando por P.

Voltemo-nos, agora, ao estudo de certos ângulos em um círculo. Dado, no plano, um círculo Γ de centro O, um **ângulo central** em Γ é um ângulo de vértice O e tendo dois raios OA e OB por lados. Em geral, tal ângulo central será denotado por $\angle AOB$ e o contexto tornará claro a qual dos dois ângulos $\angle AOB$ estamos nos referindo. Por definição, a *medida* do ângulo central $\angle AOB$ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ correspondente. O exemplo a seguir mostra que ângulos centrais iguais subentendem cordas também iguais.

Exemplo 3.18. Se A, B, C e D são pontos sobre um círculo Γ, tais que os ângulos centrais $\angle AOB$ e $\angle COD$ são iguais, então $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Prova. Suponha (cf. figura 3.12) que $A\widehat{O}B = C\widehat{O}D < 180°$ (o caso $A\widehat{O}B = C\widehat{O}D > 180°$ pode ser tratado de modo análogo). Como

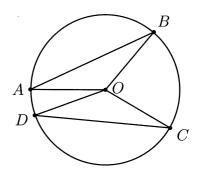



Figura 3.12: cordas de ângulos centrais iguais.

$\overline{AO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{DO}$ e $A\widehat{O}B = C\widehat{O}D$, os triângulos AOB e COD são congruentes por LAL, de sorte que $\overline{AB} = \overline{CD}$. ■

Outra importante classe de ângulos em um círculo é aquela formada pelos ângulos *inscritos*. Por definição, um ângulo **inscrito** num círculo é um ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e cujos lados são duas cordas do mesmo. A proposição, conhecida como o **teorema do ângulo inscrito** a seguir nos ensina a calcular sua medida.

Proposição 3.19. Se AB e AC são cordas de um círculo de centro O, então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade da medida do ângulo central $\angle BOC$ correspondente.

Prova. Consideremos três casos separadamente:

(a) O ângulo $\angle BAC$ contém o centro O em seu interior (figura 3.13); como os triângulos OAC e OAB são isósceles, de bases respectivamente AC e AB, temos $O\widehat{A}C = O\widehat{C}A = \alpha$ e $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A = \beta$, digamos. Segue, pois, que $B\widehat{A}C = \alpha + \beta$ e, pelo teorema do ângulo externo (corolário 2.21), que $C\widehat{O}A' = 2\alpha$ e $B\widehat{O}A' = 2\beta$. Daí,

$$B\widehat{O}C = B\widehat{O}A' + C\widehat{O}A' = 2(\alpha + \beta) = 2B\widehat{A}C.$$

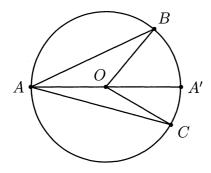



Figura 3.13: ângulo inscrito quando o centro pertence ao mesmo.

(b) O ângulo $\angle BAC$ não contém o centro O (figura 3.14): uma vez mais, temos OAC e OAB isósceles de bases AC e AB. Ademais, sendo $O\widehat{A}C = O\widehat{C}A = \alpha$ e $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A = \beta$, temos $B\widehat{A}C = \beta - \alpha$ e, novamente pelo teorema do ângulo externo, $C\widehat{O}A' = 2\alpha$ e $B\widehat{O}A' = 2\beta$. Logo,

$$B\widehat{O}C = B\widehat{O}A' - C\widehat{O}A' = 2(\beta - \alpha) = 2B\widehat{A}C.$$

(c) O centro O está sobre um dos lados de $\angle BAC$: a análise deste caso é análoga àquela dos dois casos anteriores e será deixada como exercício para o leitor. ∎

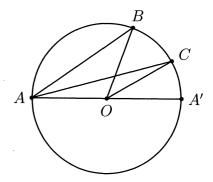



Figura 3.14: ângulo inscrito quando o centro não pertence ao mesmo.

Dados um círculo Γ de centro O e uma corda AB de Γ, um caso particular importante da proposição anterior é aquele em que AB é um diâmetro de Γ (figura 3.15). Sendo P um ponto de Γ distinto de A e de B, segue da referida proposição que

$$A\widehat{P}B = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

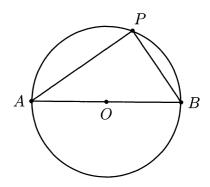



Figura 3.15: ângulo inscrito em um semicírculo.

O *caso limite* de um ângulo inscrito é aquele de um **ângulo de segmento** (figura 3.16): seu vértice é um ponto do círculo e seus

lados são um uma corda e o outro a tangente ao círculo no vértice do ângulo. A proposição a seguir mostra que podemos calcular a medida de ângulos de segmento de maneira análoga ao cálculo das medidas de ângulos inscritos.

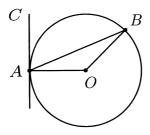



Figura 3.16: medida de um ângulo de segmento.

Proposição 3.20. Nas notações da figura 3.16, a medida do ângulo de segmento $\angle BAC$ é igual à metade do ângulo central $\angle AOB$ correspondente.

Prova. Seja $B\widehat{A}C = \alpha$. Como $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AO}$, temos $A\widehat{B}O = B\widehat{A}O = 90° - \alpha$ e, daí,

$$B\widehat{O}A = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha = 2B\widehat{A}C.$$

■

Outra maneira útil de generalizarmos ângulos inscritos é considerar ângulos *ex-cêntricos* mas, nesse caso, há dois tipos distintos, quais sejam, os *interiores* e os *exteriores*. Um ângulo **ex-cêntrico interior** (figura 3.17) é um ângulo formado por duas cordas de um círculo que se intersectam no interior do mesmo; um ângulo **ex-cêntrico exterior** é um ângulo formado por duas cordas de um círculo que se intersectam no exterior do mesmo.

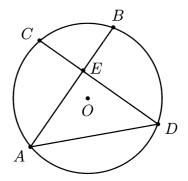



Figura 3.17: medida de um ângulo ex-cêntrico interior.

A proposição a seguir ensina como calcular medidas de ângulos ex-cêntricos. A esse respeito, veja também o problema 16, página 122.

Proposição 3.21. Sejam AB e CD duas cordas de um círculo, cujas retas suportes se intersectam em um ponto E.

(a) Se E for interior ao círculo, então a medida do ângulo ex-cêntrico interior $\angle AEC$ é igual à média aritmética das medidas dos arcos $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BD}$ subentendidos.

(b) Se E for exterior ao círculo, então a medida do ângulo ex-cêntrico exterior $\angle AEC$ é igual ao módulo da semidiferença das medidas dos arcos $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{AC}$ subentendidos.

Prova.
(a) Basta aplicar sucessivamente o teorema do ângulo externo (corolário 2.21) e o resultado da proposição 3.19:

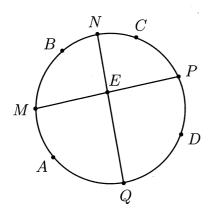
$$A\widehat{E}C = A\widehat{D}C + B\widehat{A}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}.$$

(b) Exercício. ■

Exemplo 3.22. Sejam A, B, C e D pontos sobre um círculo Γ, tais que as cordas AC e BD se intersectam no interior de Γ. Se M, N, P e Q denotam, respectivamente, os pontos médios dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ (que não contém C), $\overset{\frown}{BC}$ (que não contém D), $\overset{\frown}{CD}$ (que não contém A) e $\overset{\frown}{AD}$ (que não contém B), prove que $\overleftrightarrow{MP} \perp \overleftrightarrow{NQ}$.

Prova. Nas notações do enunciado e da figura abaixo, sejam $\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{BC} = 2\beta$, $\overset{\frown}{CD} = 2\gamma$ e $\overset{\frown}{AD} = 2\delta$. Então $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$ e $\overset{\frown}{MN} = \alpha + \beta$ e $\overset{\frown}{PQ} = \gamma + \delta$. Portanto, sendo E o ponto de concurso de MP e NQ, temos

$$M\widehat{E}N = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{PQ}) = \frac{1}{2}((\alpha + \beta) + (\gamma + \delta)) = 90°.$$

■

A proposição a seguir estabelece a existência e explica como construir um importante lugar geométrico, o *arco capaz* de um ângulo dado.

Proposição 3.23. Dados um segmento AB e um ângulo α, com $0° < \alpha < 180°$, o LG dos pontos P do plano tais que $A\widehat{P}B = \alpha$ é a reunião de dois arcos de círculo, simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e tendo os pontos A e B em comum. Tais arcos são os **arcos capazes** de α em relação a AB.

Prova. Primeiramente, analisemos o caso $0° < \alpha < 90°$. Seja (cf. figura 3.18) $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ tal que $A\widehat{P}B = \alpha$. Se P' é o simétrico de P em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ (cf. problema 4, página 44), então $\overleftrightarrow{AB}$ é a mediatriz de PP' e, daí, $\overline{AP} = \overline{AP'}$ e $\overline{BP} = \overline{BP'}$. Portanto, os triângulos ABP e ABP' são congruentes por LLL, de sorte que $A\widehat{P'}B = A\widehat{P}B = \alpha$. Analogamente, $A\widehat{P'}B = \alpha$ acarreta $A\widehat{P}B = \alpha$, de forma que, para

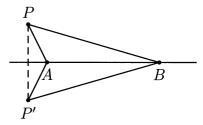



Figura 3.18: $A\widehat{P}B = A\widehat{P'}B$.

estudar o LG pedido, podemos nos restringir somente aos pontos P situados em um dos semiplanos que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ determina. Doravante, suporemos que tal semiplano é aquele situado *acima* da reta $\overleftrightarrow{AB}$ (cf. figura 3.19).

Em tal semiplano, seja O o ponto tal que AOB é um triângulo isósceles de base AB, com $A\widehat{O}B = 2\alpha$ (note que $0° < 2\alpha < 180°$ no caso que estamos considerando). Sendo $\overline{OA} = \overline{OB} = R$, seja Γ o arco de círculo, de centro O e raio R, situado acima da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Sendo P um ponto qualquer de Γ, temos pelo teorema do ângulo inscrito que

$$A\widehat{P}B = \frac{1}{2}A\widehat{O}B = \alpha,$$

de modo que P pertence ao LG procurado.

Seja, agora, P' um ponto do semiplano superior, tal que $P' \notin \Gamma$; mostremos que P' não pertence ao LG desejado. Sendo $\mathcal{R}$ a região

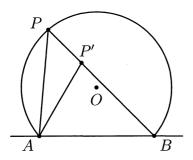



Figura 3.19: arco capaz (superior) de α sobre AB.

limitada do plano, delimitada por Γ e AB, há duas possibilidades: $P' \in \mathcal{R}$ ou $P \notin \mathcal{R} \cup \Gamma$. Analisemos o caso em que $P' \in \mathcal{R}$, sendo a análise do outro caso totalmente análoga. Nas notações da figura 3.19, segue do teorema do ângulo externo e da discussão do parágrafo anterior que

$$A\widehat{P'}B = A\widehat{P}B + P\widehat{A}P' > A\widehat{P}B = \alpha,$$

de sorte que P' não pertence ao LG procurado.

Voltemo-nos, agora, ao caso em que $\alpha = 90°$, observando inicialmente que, como no caso anterior, um argumento de simetria reduz o problema aos pontos do semiplano situado acima da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Agora, a discussão do parágrafo imediatamente posterior à prova da proposição 3.19 garante que todo ponto do semicírculo de diâmetro AB situado no semiplano superior pertence ao LG em questão (figura 3.20).

Reciprocamente, se P é um ponto do semiplano superior, tal que $A\widehat{P}B = 90°$, e O é o ponto médio de AB, então o corolário 2.44 garante que $\overline{PO} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AO}$. Assim, P pertence ao semicírculo de centro O e diâmetro AB.

Por fim, para o caso $90° < \alpha < 180°$, remetemos o leitor ao problema 17, página 122. ■

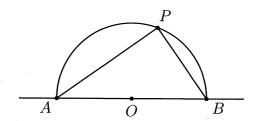



Figura 3.20: arco capaz (superior) de 90° sobre AB.

A prova da proposição anterior também ensina como construir os arcos capazes de um ângulo α sobre AB, quando $0° < \alpha \leq 90°$: se $\alpha = 90°$, temos somente de construir o círculo de diâmetro AB. Suponha, pois $0° < \alpha < 90°$. Nas notações da prova da referida proposição, como $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A$, temos

$$O\widehat{A}B = O\widehat{B}A = \frac{1}{2}(180° - A\widehat{O}B) = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha;$$

assim, obtemos o centro O do arco capaz superior como sendo a interseção das semirretas que partem de A e de B, estão situadas em tal semiplano e formam ângulos de $90° - \alpha$ com o segmento AB. Observamos, por fim, que o caso $90° < \alpha < 180°$ pode ser tratado de modo análogo (cf. problema 17, página 122).

Exemplo 3.24. Construa com régua e compasso o arco capaz superior de α sobre AB.

Prova.

A ——— B

Descrição dos passos.

1. De acordo com a discussão acima, construa, no semiplano superior, as semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$ tais que $B\widehat{A}X = A\widehat{B}Y = 90° - \alpha$.

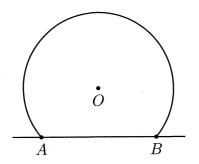
2. Marque o centro O do arco capaz pedido como o ponto de interseção das semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$.

■

O próximo exemplo mostra que há uma relação simples (e, conforme veremos nos problemas desta seção, útil) entre os arcos capazes de um ângulo e de sua metade.

Exemplo 3.25. A figura abaixo mostra um dos arcos capazes do ângulo α sobre o segmento AB. Construa, com régua e compasso, o arco capaz de $\frac{1}{2}\alpha$ sobre AB, correspondente ao arco capaz dado.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Trace a mediatriz do segmento AB e marque seu ponto O' de interseção com o arco capaz dado.

2. Use o teorema do ângulo inscrito para mostrar que o arco de centro O' e raio $\overline{OA} = \overline{OB}$, contido no mesmo semiplano que o arco dado é o arco pedido.

■

Dentre outros problemas interessantes, podemos usar arcos capazes para examinar o problema de traçar as tangentes a um círculo por um ponto exterior ao mesmo, conforme ensina nosso próximo resultado.

Proposição 3.26. Dados, no plano, um círculo Γ e um ponto P exterior ao mesmo, há exatamente duas retas tangentes a Γ e passando por P.

Prova. Sejam O o centro do círculo dado e A e B os pontos de interseção do mesmo com aquele de diâmetro OP (figura 3.21). Pelas discussões anteriores, os semicírculos superior e inferior do círculo traçado podem ser vistos como os arcos capazes de 90° sobre OP e, daí, $O\widehat{A}P = O\widehat{B}P = 90°$. Portanto, $OA \perp \overleftrightarrow{AP}$ e $OB \perp \overleftrightarrow{BP}$, de sorte que, pela proposição 3.17, as retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$ são tangentes ao círculo dado.

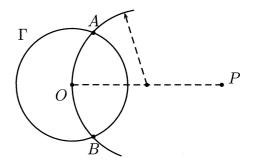
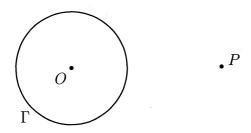



Figura 3.21: tangentes a um círculo por um ponto exterior.

Reciprocamente, se r é uma reta passando por P e tangente ao círculo dado em X, digamos, então $OX \perp \overleftrightarrow{XP}$, ou, o que é o mesmo, $O\widehat{X}P = 90°$. Logo, X pertence a um dos arcos capazes de $90°$ sobre OP, i.e., X pertence ao círculo de diâmetro OP. Mas aí, X está sobre a interseção do círculo dado com aquele de diâmetro OP e, portanto, $X = A$ ou $X = B$. ■

Conforme ensina o próximo exemplo, a demonstração da proposição acima pode ser facilmente formatada em passos que, uma vez executados, fornecem a construção, com régua e compasso, das tangentes a um círculo dado, passando por um ponto também dado e exterior ao mesmo.

Exemplo 3.27. Nas notações da figura a seguir, construa, com régua e compasso, as retas tangentes a Γ e passando por P.

Prova.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Marque o ponto médio M do segmento OP.
2. Trace o círculo γ, de centro M e raio $\overline{OM} = \overline{MP}$.
3. Marque os pontos A e B, de interseção dos círculos γ e Γ; as tangentes pedidas são as retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$.

■

A proposição a seguir estabelece duas propriedades bastante úteis das tangentes traçadas a um círculo a partir de um ponto exterior ao mesmo.

Proposição 3.28. Sejam Γ um círculo de centro O e P um ponto exterior ao mesmo. Se $A, B \in \Gamma$ são tais que $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são tangentes a Γ (figura 3.22), então:

(a) $\overline{PA} = \overline{PB}$.

(b) $\overleftrightarrow{PO}$ é a mediatriz de AB.

(c) $\overleftrightarrow{PO}$ é a bissetriz dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle APB$.

(d) $\overleftrightarrow{PO} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

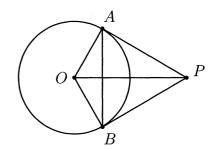



Figura 3.22: propriedades das tangentes por um ponto exterior.

Prova. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $P\widehat{A}O = P\widehat{B}O = 90°$, os triângulos POA e POB são congruentes, pelo caso especial CH de congruência de triângulos retângulos (cf. problema 1, página 54); em particular, $\overline{PA} = \overline{PB}$, $A\widehat{P}O = B\widehat{P}O$ e $A\widehat{O}P = B\widehat{O}P$.

Agora, como P e O equidistam de A e de B, segue da proposição 3.5 que $\overleftrightarrow{PO}$ é a mediatriz do segmento AB. Logo, $\overleftrightarrow{PO} \perp \overleftrightarrow{AB}$. ■

Problemas – Seção 3.3

1. * Dados no plano um círculo Γ e um ponto P sobre o mesmo, mostre que a reta tangente a Γ em P é *única*.

2. São dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \in r$. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos pontos do plano que são centros dos círculos tangentes à reta r no ponto A.

3. São dados, no plano, retas concorrentes r e s e um ponto $P \in r$. Construa, com régua e compasso, os círculos tangentes a r e s, sendo P o ponto de tangência com a reta r.

4. São dados, no plano, um segmento de comprimento R e uma reta r. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos pontos do plano que são centros dos círculos de raio R, tangentes à reta r.

5. Temos, no plano, duas retas concorrentes r e s. Dado um real $R > 0$, construa todos os círculos de raio R, tangentes simultaneamente a r e a s.

6. Sejam a, b e c três retas dadas no plano, com $a \parallel b$ e c concorrente com a e b. Construa, com régua e compasso, os círculos tangentes a a, b e c.

   Para os problemas 7 a 9 a seguir, dizemos que dois círculos são:

   - **exteriores** se não tiverem pontos comuns e tiverem interiores disjuntos;
   - **interiores** se não tiverem pontos comuns mas o interior de um deles contiver o outro;
   - **secantes** se tiverem dois pontos em comum;

   - **tangentes** se tiverem um único ponto comum; nesse último caso, os círculos são **tangentes exteriormente** se tiverem interiores disjuntos e **tangentes interiormente** caso contrário.

7. * Dados círculos $\Gamma_1(O_1; R_1)$ e $\Gamma_2(O_2; R_2)$, prove que Γ_1 e Γ_2 são:
   (a) exteriores se, e só se, $\overline{O_1O_2} > R_1 + R_2$.
   (b) tangentes exteriormente se, e só se, $\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$.
   (c) secantes se, e só se, $|R_1 - R_2| < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$.
   (d) tangentes interiormente se, e só se, $\overline{O_1O_2} = |R_1 - R_2|$.
   (e) interiores se, e só se, $\overline{O_1O_2} < |R_1 - R_2|$.

8. São dados, no plano, um círculo Γ de centro O e um ponto $A \in \Gamma$. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos centros dos círculos tangentes a Γ em A.

9. São dados, no plano, um círculo Γ, de centro O e raio R, e um segmento de comprimento r. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos centros dos círculos de raio r e tangentes a Γ. Em que medida o LG em questão depende dos valores R e r?

10. São dados, no plano, um círculo Γ e pontos A, P e Q, tais que $P, Q \in \Gamma$ e os segmentos AP e AQ tangenciam Γ e medem 5cm cada. Escolhemos pontos $B \in AP$ e $C \in AQ$ tais que BC também tangencia Γ. Calcule os possíveis valores do perímetro do triângulo ABC.

11. Sejam $ABCD$ um quadrado de lado a e Γ o círculo de centro A e raio a. Marcamos pontos M e N, respectivamente sobre BC e CD, tais que MN tangencia Γ. Quais os possíveis valores do ângulo $M\widehat{A}N$?

12. As retas r e s são concorrentes em A e tangentes a um círculo Γ, de centro O. Pontos $P \in r$ e $Q \in s$ são tais que $\overleftrightarrow{PQ}$ tangencia Γ e deixa A e O em semiplanos opostos. Se $P\widehat{A}Q = 30^\circ$, calcule $P\widehat{O}Q$.

13. Dois círculos Γ e Σ se intersectam em dois pontos distintos A e B. Escolhemos $X \in \Gamma$ e $Y \in \Sigma$ tais que $A \in XY$. Prove que a medida do ângulo $\angle XBY$ independe da direção da reta $\overleftrightarrow{XY}$.

14. As cordas AB e CD de um círculo Γ são perpendiculares em E, um ponto situado no interior do círculo. A reta perpendicular a AC por E intersecta o segmento BD em F. Prove que F é o ponto médio de BD.

15. Sejam A, B e C pontos sobre um círculo Γ, tais que os arcos menores $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{BC}$ medem todos 120°. Se P é um ponto de Γ situado no arco menor $\overset{\frown}{BC}$, prove que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

16. Prove o item (b) da proposição 3.21. Verifique, ainda, que as fórmulas para o cálculo das medidas de ângulos ex-cêntricos permanecem válidas quando um dos lados do mesmo contiver uma corda do círculo e o outro for tangente ao círculo.

17. * Analise a construção dos arcos capazes de um ângulo α sobre o segmento AB, quando $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

18. Construa o triângulo ABC, conhecendo os comprimentos a do lado BC, h_a da altura relativa a BC e a medida α do ângulo $\angle A$.

19. * Sejam ABC um triângulo e P e M, respectivamente, os pés da bissetriz interna e da mediana relativas ao lado BC. Se P e M coincidirem, prove que ABC é isósceles de base BC.

20. * Construa um quadrado $ABCD$, conhecendo o comprimento l de seus lados e as posições dos pontos M, N e P, situados respectivamente sobre os lados AB, AD e sobre a diagonal AC.

21. De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C, a medida α do ângulo $\angle BAC$ e o semiplano β, dentre os determinados pela reta $\overleftrightarrow{BC}$, no qual está situado o vértice A. Quando A descreve o arco capaz de α sobre BC, situado no semiplano β, encontre o LG descrito pelo incentro I de ABC.

22. * São dados, no plano, dois círculos exteriores Γ e Σ. Construa, com régua e compasso, todas as retas tangentes simultaneamente a Γ e Σ.

23. * Dois círculos $\Gamma_1(O_1; R_1)$ e $\Gamma_2(O_2; R_2)$ são secantes, intersectando-se nos pontos A e B. Dado um segmento de comprimento l, explique como traçar, com régua e compasso, uma reta passando por A (dita *secante* aos círculos), intersectando Γ_1 e Γ_2 respectivamente em X e em Y (com $X, Y \neq A$), e tal que $\overline{XY} = l$. Explique sob que condições há solução.

24. Dois círculos $\Gamma_1(O_1; R_1)$ e $\Gamma_2(O_2; R_2)$ são secantes, intersectando-se nos pontos A e B. Explique como traçar com régua e compasso a secante aos círculos, passando por A e tendo comprimento máximo.

25. Temos, desenhado no plano, um triângulo ABC. Dado um segmento de comprimento a, construa, com régua e compasso, um triângulo equilátero MNP, de lado a e tal que $A \in NP$, $B \in MP$ e $C \in MN$.

26. Temos, desenhado no plano, um triângulo ABC. Construa, com régua e compasso, um triângulo equilátero MNP, tendo o maior lado possível e tal que $A \in NP$, $B \in MP$ e $C \in MN$.

27. De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C e a medida α do ângulo $\angle A$. Conhecendo a soma l dos comprimentos dos lados AB e AC, construa com régua e compasso a posição do vértice A.

O resultado do problema a seguir é conhecido como o **teorema da corda quebrada**, sendo devido a Arquimedes.

28. São dados um círculo Γ e pontos A, B e C sobre o mesmo, tais que $\overline{AB} > \overline{AC}$. Marcamos o ponto médio M do arco $\overset{\frown}{BC}$ que contém A, bem como o ponto N, pé da perpendicular baixada de M ao segmento AB. Prove que $\overline{BN} = \overline{AN} + \overline{AC}$.

3.4 Círculos associados a um triângulo

De posse dos conceitos de arco capaz e tangência de reta e círculo, nesta seção enveredamos pelo estudo de alguns círculos notáveis associados a um triângulo. Começamos mostrando que todo triângulo admite um único círculo que passa por seus vértices.

Proposição 3.29. Todo triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Tal círculo é dito **circunscrito** ao triângulo e seu centro é o circuncentro do mesmo.

Prova. Seja ABC um triângulo de circuncentro O (figura 3.23). Como O é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, temos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Denotando por R tal distância comum, segue que o círculo de centro O e raio R passa por A, B, C. Existe, portanto, um círculo passando pelos vértices de ABC.

Reciprocamente, o centro de um círculo que passe pelos vértices de ABC deve equidistar dos mesmos. Portanto, o centro pertence às mediatrizes dos lados de ABC, de forma que coincide com o ponto de

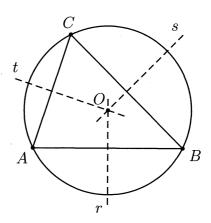



Figura 3.23: circuncentro e círculo circunscrito a um triângulo.

interseção das mesmas, isto é, com o circuncentro O de ABC. Por fim, o raio do círculo, sendo a distância de O aos vértices, é igual a R. ■

Proposição 3.30. Se ABC é um triângulo de circuncentro O, então O está no interior (resp. sobre um lado, no exterior) de ABC se, e só se, ABC for acutângulo (resp. retângulo, obtusângulo).

Prova. Sejam Γ o círculo circunscrito a ABC e M o ponto médio de BC. Há três casos a considerar:

(a) O está no interior de ABC (figura 3.24): no triângulo AOB, temos $A\widehat{O}B = 2A\widehat{C}B$. Por outro lado, $0° < A\widehat{O}B < 180°$, de modo que $2A\widehat{C}B < 180°$ ou, ainda, $A\widehat{C}B < 90°$. Analogamente, $A\widehat{B}C < 90°$ e $B\widehat{A}C < 90°$, de forma que ABC é acutângulo.

(b) O está sobre um lado de ABC (figura 3.25): suponha, sem perda de generalidade, que $O \in BC$. Nesse caso, BC é diâmetro de Γ e O é

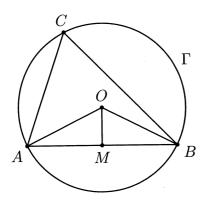



Figura 3.24: O está no interior de ABC.

o ponto médio de BC, de maneira que

$$B\widehat{A}C = \frac{1}{2}B\widehat{X}C = \frac{1}{2}180^\circ = 90^\circ.$$

(c) O está no exterior de ABC (figura 3.26):
suponha, sem perda de generalidade, que O e A estão em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Como a medida do arco $B\overset{\frown}{X}C$ é claramente maior que 180°, temos

$$B\widehat{A}C = \frac{1}{2}B\overset{\frown}{X}C > \frac{1}{2}180^\circ = 90^\circ,$$

e ABC é obtusângulo em A. ∎

A seguir, colecionamos uma elaboração útil da discussão do caso (a) da proposição anterior.

Corolário 3.31. Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O. Se M é o ponto médio do lado AB, então $A\widehat{O}M = B\widehat{O}M = A\widehat{C}B$.

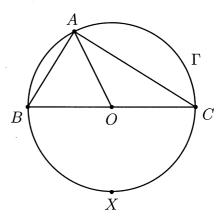



Figura 3.25: O está sobre um lado de ABC.

Prova. Nas notações da figura 3.24, temos que OM é a mediana relativa à base AB do triângulo isósceles AOB. Portanto, o problema 8, página 45, garante que OM também é bissetriz interna de $\angle AOB$. Daí,

$$A\widehat{O}M = B\widehat{O}M = \frac{1}{2}A\widehat{O}B = A\widehat{C}B,$$

onde utilizamos o teorema do ângulo inscrito na última igualdade. ∎

Também é relevante o fato de que todo triângulo admite quatro círculos tangentes a seus lados. O próximo resultado apresenta o mais importante de tais círculos.

Proposição 3.32. Todo triângulo admite um único círculo contido no mesmo e tangente a seus lados. Tal círculo é dito **inscrito** no triângulo e seu centro é o incentro do triângulo.

Prova. Seja I o incentro de um triângulo ABC (figura 3.27). Como I é o ponto de interseção das bissetrizes internas de ABC, temos que I equidista dos lados de ABC. Sendo r tal distância comum aos lados, segue que o círculo de centro I e raio r está contido em

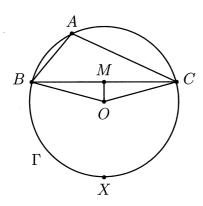



Figura 3.26: O está no exterior de ABC.

ABC e tangencia seus lados. A unicidade do círculo inscrito pode

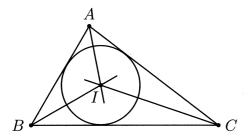
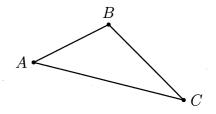



Figura 3.27: círculo inscrito em um triângulo.

ser estabelecida mediante um argumento análogo ao da unicidade do círculo circunscrito, sendo deixada ao leitor. ■

Exemplo 3.33. Construa, com régua e compasso, os círculos inscrito e circunscrito ao triângulo ABC, dado a seguir.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Para o círculo inscrito, comece construindo o incentro I de ABC.

2. Em seguida, trace a reta r que passa por I e é perpendicular ao lado BC.

3. Se M for o ponto de interseção da reta r com o lado BC, então o círculo inscrito é aquele de centro I e raio IM.

4. Quando ao círculo circunscrito, construa, inicialmente, o circuncentro O de ABC.

5. O círculo circunscrito é aquele de centro O e raio OA.

■

Conforme antecipamos há pouco, há outros três círculos notáveis associados a todo triângulo, os círculos *ex-inscritos* aos lados do triângulo. O próximo resultado garante a justeza dessa afirmação.

Proposição 3.34. Em todo triângulo ABC, existe um único círculo tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC. Tal círculo é o círculo **ex-inscrito** ao lado BC e seu centro é o **ex-incentro** de ABC relativo a BC (ou ao vértice A).

Prova. Sejam (cf. figura 3.28) r e s as bissetrizes externas dos vértices B e C do triângulo ABC e I_a seu ponto de interseção (o leitor pode checar sem dificuldade que as porções das retas r e s situadas na região angular $\angle BAC$ formam ângulos agudos com o lado BC, de forma que r e s realmente concorrem em tal região angular). Como $I_a \in r$ e r é bissetriz do ângulo externo em B, segue que

$$d(I_a, \overleftrightarrow{BC}) = d(I_a, \overleftrightarrow{AB}).$$

Do mesmo modo, uma vez que $I_a \in s$, concluímos que $d(I_a, \overleftrightarrow{BC}) = d(I_a, \overleftrightarrow{AC})$. Denotando por r_a a distância comum de I_a às retas suportes dos lados de ABC, segue que o círculo de centro I_a e raio r_a tangencia BC e os prolongamentos de AB e AC. Por fim, deixamos

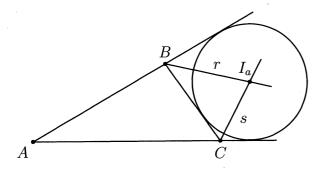



Figura 3.28: o círculo ex-inscrito ao lado BC do triângulo ABC.

ao leitor a tarefa de estabelecer a unicidade de um tal círculo. ■

Observações 3.35.

i. Em geral, dado um triângulo ABC, denotaremos sistematicamente o centro e o raio do círculo circunscrito respectivamente por O e R, do círculo inscrito respectivamente por I e r, e do círculo ex-inscrito a BC respectivamente por I_a e r_a.

ii. Todo triângulo ABC admite exatamente três círculos ex-inscritos; consoante as notações estabelecidas no item i., denotamos os centros e raios dos círculos ex-inscritos a AC e AB respectivamente por I_b, I_c e r_b, r_c.

Uma elaboração útil da prova da proposição acima é o conteúdo do corolário a seguir.

Corolário 3.36. Em todo triângulo, a bissetriz interna relativa a um vértice concorre com as bissetrizes externas relativas aos outros dois vértices no ex-incentro.

Prova. Nas notações da prova da proposição anterior, estabelecemos que $d(I_a, \overleftrightarrow{AB}) = d(I_a, \overleftrightarrow{BC})$ e $d(I_a, \overleftrightarrow{AC}) = d(I_a, \overleftrightarrow{BC})$. Portanto,

$$d(I_a, \overleftrightarrow{AB}) = d(I_a, \overleftrightarrow{AC})$$

e, daí, a proposição 3.6 garante que I_a pertence à bissetriz do ângulo $\angle BAC$. ■

Conforme ensina a proposição a seguir, os pontos de tangência dos círculos inscrito e ex-inscritos a um triângulo com seus lados delimitam vários segmentos notáveis, cujos comprimentos podem ser facilmente calculados em termos dos comprimentos dos lados do triângulo.

Proposição 3.37. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e semiperímetro p (figura 3.29). Sejam D, E e F os pontos onde o círculo inscrito em ABC tangencia os lados BC, CA e AB, respectivamente, e suponha, ainda, que o círculo ex-incrito a BC tangencia tal lado em M e os prolongamentos de AC e AB respectivamente em N e P. Então:

(a) $\overline{BD} = \overline{BF} = p - b$, $\overline{CD} = \overline{CE} = p - c$, $\overline{AF} = \overline{AE} = p - a$.

(b) $\overline{AN} = \overline{AP} = p$.

(c) $\overline{BM} = \overline{BP} = p - c$, $\overline{CM} = \overline{CN} = p - b$.

(d) $\overline{EN} = \overline{FP} = a$.

(e) O ponto médio de BC também é o ponto médio de DM.

Prova.
(a) Com o auxílio do item (a) da proposição 3.28, denotemos $\overline{AE} = \overline{AF} = x$, $\overline{BD} = \overline{BF} = y$ e $\overline{CD} = \overline{CE} = z$. Obtemos, assim, o sistema

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases}.$$

Somando membro a membro as equações do mesmo, obtemos $x + y + z = 2p$ e, daí,

$$x = (x + y + z) - (y + z) = p - a.$$

Analogamente, $y = p - b$ e $z = p - c$.

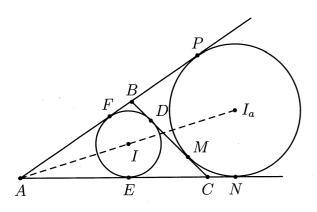



Figura 3.29: alguns segmentos notáveis do triângulo ABC.

(b) Sendo $\overline{AN} = \overline{AP} = u$ e utilizando novamente o item (a) da proposição 3.28, temos

$$\begin{aligned} 2u &= \overline{AN} + \overline{AP} = (\overline{AC} + \overline{CN}) + (\overline{AB} + \overline{BP}) \\ &= (\overline{AC} + \overline{AB}) + (\overline{CN} + \overline{BP}) \\ &= (b + c) + (\overline{CM} + \overline{BM}) \\ &= b + c + \overline{BC} = a + b + c = 2p, \end{aligned}$$

de modo que $u = p$.

(c) Como em (b), temos $\overline{BM} = \overline{BP}$ e $\overline{CM} = \overline{CN}$. Por outro lado,

$$\overline{BP} = \overline{AP} - \overline{AB} = p - c \quad \text{e} \quad \overline{CN} = \overline{AN} - \overline{AC} = p - b.$$

(d) Façamos a prova de que $\overline{EN} = a$, sendo a prova de que $\overline{FP} = a$ totalmente análoga:

$$\overline{EN} = \overline{AN} - \overline{AE} = p - (p - a) = a.$$

(e) Basta provar que $\overline{CM} = \overline{BD}$, o que já fizemos acima. ■

Conforme o leitor constatará, os cálculos da proposição acima serão úteis para a resolução de muitos problemas, valendo mesmo a pena memorizar pelo menos os resultados dos itens (a), (b), (d) e (e). Observe, ainda, que os itens (c), (d) e (e) são decorrências praticamente imediatas dos itens (a) e (b).

Terminemos esta seção apresentando um resultado que fornece outra relação importante entre o incentro e os ex-incentros de um triângulo.

Proposição 3.38. Sejam ABC um triângulo qualquer, I seu incentro, I_a seu ex-incentro relativo a BC e M o ponto onde o círculo circunscrito a ABC intersecta o segmento II_a (cf. figura 3.30). Então, M é o ponto médio do arco BC que não contém A e

$$\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MI} = \overline{MI_a}.$$

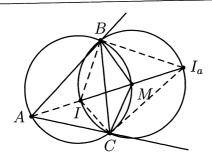



Figura 3.30: incentro, ex-incentro e ponto médio do arco correspondente.

Prova. Como $M\widehat{A}B = M\widehat{A}C = \frac{1}{2}\widehat{A}$, segue do teorema do ângulo inscrito que os arcos $\overset{\frown}{MB}$ e $\overset{\frown}{MC}$ que não contêm A são iguais e, portanto, M é seu ponto médio. Como arcos iguais subentendem cordas iguais, temos $\overline{MB} = \overline{MC}$. Agora, novamente pelo teorema do ângulo inscrito, temos $B\widehat{M}I = B\widehat{M}A = B\widehat{C}A = \widehat{C}$ e

$$\begin{aligned} I\widehat{B}M &= I\widehat{B}C + C\widehat{B}M = \frac{1}{2}\widehat{B} + C\widehat{A}M \\ &= \frac{1}{2}\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} B\widehat{I}M &= 180^\circ - I\widehat{B}M - B\widehat{M}I \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{B} - \frac{1}{2}\widehat{A} - \widehat{C} \\ &= \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \frac{1}{2}\widehat{B} - \frac{1}{2}\widehat{A} - \widehat{C} \\ &= \frac{1}{2}\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A} = I\widehat{B}M, \end{aligned}$$

de modo que o triângulo IBM é isósceles de base IB. Assim, $\overline{IM} = \overline{BM} = \overline{CM}$.

Deixamos como exercício para o leitor provar a igualdade $\overline{BM} = \overline{MI_a}$; o argumento é análogo ao executado acima. ∎

Problemas – Seção 3.4

1. Construa o triângulo ABC, conhecendo os comprimentos do raio R do círculo circunscrito e a e b dos lados BC e AC, respectivamente.

2. Sejam ABC um triângulo qualquer e M e N, respectivamente, os pontos onde as bissetrizes interna e externa relativas ao vértice A intersectam o círculo circunscrito a ABC. Prove que MN é um diâmetro desse círculo.

3. Sejam ABC um triângulo qualquer e M, N e P os pontos onde as bissetrizes internas de ABC, relativas respectivamente aos vértices A, B e C, intersectam o círculo circunscrito ao triângulo (com $M \neq A$, $N \neq B$ e $P \neq C$). Prove que o incentro de ABC é o ortocentro de MNP.

4. Sejam a, b e c três retas do plano, duas a duas concorrentes e não passando as três por um mesmo ponto. Construa, com régua e compasso, os pontos do plano equidistantes de a, b e c.

5. * Seja ABC um triângulo de ortocentro H e circuncentro O. Prove que a bissetriz interna relativa ao lado BC também bissecta o ângulo $\angle HAO$.

6. * Prove que, em todo triângulo, o simétricos do ortocentro em relação às retas suportes dos lados do triângulo estão situados sobre o círculo circunscrito ao mesmo.

7. De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C, a medida α do ângulo $\angle BAC$ e o semiplano β, dos determinados pela reta $\overleftrightarrow{BC}$, ao qual pertence o vértice A. Quando A descreve o arco capaz de α sobre BC, situado no semiplano β, qual a curva descrita pelo ortocentro H de ABC?

8. De um triângulo ABC conhecemos as posições dos vértices B e C, a medida α do ângulo $\angle BAC$ e o semiplano β, dos determi-nados pela reta $\overleftrightarrow{BC}$, ao qual pertence o vértice A. Quando A descreve o arco capaz de α sobre BC, situado no semiplano β, qual a curva descrita pelo ex-incentro I_a relativo a BC?

9. Seja ABC um triângulo retângulo em A e H o pé da altura relativa à hipotenusa BC. Sejam, ainda, I_1 e I_2 os incentros dos triângulos ABH e ACH. Prove que A é o ex-incentro do triângulo I_1HI_2 relativo ao lado I_1I_2.

10. Construa o quadrado $ABCD$, conhecendo as posições de quatro pontos M, N, P e Q, situados respectivamente sobre os lados AB, BC, CD e DA.

11. (OIM.) Em um triângulo ABC, marcamos os pontos Q e R, de tangência do lado BC respectivamente com o círculo inscrito em ABC e ex-inscrito a ABC em relação ao lado BC. Se P é o pé da perpendicular baixada de B à bissetriz interna de ABC relativa ao vértice A, mostre que $Q\widehat{P}R = 90°$.

12. Construa o triângulo ABC, conhecidos os comprimentos p de seu semiperímetro, a do lado BC e r_a do círculo ex-inscrito ao lado BC.

3.5 Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis

Contrariamente aos triângulos, nem todo quadrilátero (convexo) admite um círculo passando por seus vértices. Para ver isso, basta tomarmos um triângulo ABD e um ponto C não pertencente ao círculo circunscrito a ABD (cf. figura 3.31). Por outro lado, dizemos que

Figura 3.31: um quadrilátero não inscritível.

um quadrilátero é **inscritível** se existir um círculo passando por seus vértices.

A partir da unicidade do círculo circunscrito a um triângulo, é imediato que, se um quadrilátero for inscritível, então o círculo que passa por seus vértices é único; doravante, tal círculo será denominado o **círculo circunscrito** ao quadrilátero.

Podemos mostrar (cf. problema 7, página 145) que um quadrilátero é inscritível se, e só se, as mediatrizes de seus lados se intersectarem em um único ponto, o *circuncentro* do quadrilátero. Porém, nas aplicações que temos em mente, a caracterização dos quadriláteros inscritíveis dada a seguir mostra-se, em geral, bem mais útil:

Proposição 3.39. Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB, BC, CD e DA, é inscritível se, e só se, uma qualquer das condições a seguir for satisfeita:

(a) $D\widehat{A}B + B\widehat{C}D = 180°$.

(b) $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$.

Prova. Suponhamos, inicialmente, que $ABCD$ seja inscritível (cf. figura 3.32.) Então, pelo teorema do ângulo inscrito, temos $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$ e

$$D\widehat{A}B + B\widehat{C}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD} = 180°.$$

8. De um triângulo ABC conhecemos as posições dos vértices B C, a medida α do ângulo $\angle BAC$ e o semiplano β, dos determi nados pela reta $\overleftrightarrow{BC}$, ao qual pertence o vértice A. Quando descreve o arco capaz de α sobre BC, situado no semiplano qual a curva descrita pelo ex-incentro I_a relativo a BC?

9. Seja ABC um triângulo retângulo em A e H o pé da altur relativa à hipotenusa BC. Sejam, ainda, I_1 e I_2 os incentro dos triângulos ABH e ACH. Prove que A é o ex-incentro d triângulo I_1HI_2 relativo ao lado I_1I_2.

10. Construa o quadrado $ABCD$, conhecendo as posições de quatr pontos M, N, P e Q, situados respectivamente sobre os lad AB, BC, CD e DA.

11. (OIM.) Em um triângulo ABC, marcamos os pontos Q e R, d tangência do lado BC respectivamente com o círculo inscrit em ABC e ex-inscrito a ABC em relação ao lado BC. Se P o pé da perpendicular baixada de B à bissetriz interna de AB relativa ao vértice A, mostre que $Q\widehat{P}R = 90°$.

12. Construa o triângulo ABC, conhecidos os comprimentos p d seu semiperímetro, a do lado BC e r_a do círculo ex-inscrito a lado BC.

3.5 Quadriláteros inscritíveis e circunscri tíveis

Contrariamente aos triângulos, nem todo quadrilátero (convexo admite um círculo passando por seus vértices. Para ver isso, bast tomarmos um triângulo ABD e um ponto C não pertencente ao círcul circunscrito a ABD (cf. figura 3.31). Por outro lado, dizemos qu

Figura 3.31: um quadrilátero não inscritível.

um quadrilátero é **inscritível** se existir um círculo passando por seus vértices.

A partir da unicidade do círculo circunscrito a um triângulo, é imediato que, se um quadrilátero for inscritível, então o círculo que passa por seus vértices é único; doravante, tal círculo será denominado o **círculo circunscrito** ao quadrilátero.

Podemos mostrar (cf. problema 7, página 145) que um quadrilátero é inscritível se, e só se, as mediatrizes de seus lados se intersectarem em um único ponto, o *circuncentro* do quadrilátero. Porém, nas aplicações que temos em mente, a caracterização dos quadriláteros inscritíveis dada a seguir mostra-se, em geral, bem mais útil:

Proposição 3.39. Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB, BC, CD e DA, é inscritível se, e só se, uma qualquer das condições a seguir for satisfeita:

(a) $D\widehat{A}B + B\widehat{C}D = 180°$.

(b) $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$.

Prova. Suponhamos, inicialmente, que $ABCD$ seja inscritível (cf. figura 3.32.) Então, pelo teorema do ângulo inscrito, temos $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$ e

$$D\widehat{A}B + B\widehat{C}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD} = 180°.$$

Figura 3.32: $ABCD$ inscritível $\Rightarrow D\widehat{A}B + B\widehat{C}D = 180°$ e $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$.

Reciprocamente (figura 3.33), suponhamos primeiro que $B\widehat{A}C =$

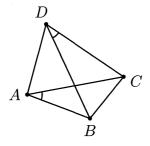



Figura 3.33: $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C \Rightarrow ABCD$ inscritível.

$B\widehat{D}C$. Como $ABCD$ é convexo e os vértices de $ABCD$ estão nomeados consecutivamente, segue que A e D estão situados em um mesmo semiplano, dos determinados pela reta $\overleftrightarrow{BC}$. Sendo θ o valor comum dos ângulos $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{D}C$, temos que A e D estão ambos situados sobre o arco capaz de θ sobre BC, situado em tal semiplano. Logo, o círculo que contém tal arco capaz circunscreve $ABCD$.

Suponhamos, agora, que $D\widehat{A}B + B\widehat{C}D = 180°$ (cf. figura 3.34) e consideremos o círculo α, circunscrito ao triângulo BAD. Se $C \notin \alpha$, seja $\overleftrightarrow{BC} \cap \alpha = \{E\}$, com $E \neq B, C$. (Na figura 3.34, esboçamos o caso em que C pertence ao interior de α.) Pelo item (a), temos

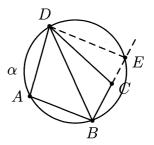



Figura 3.34: $B\widehat{A}C + B\widehat{D}C = 180° \Rightarrow ABCD$ inscritível.

$$D\widehat{A}B + B\widehat{E}D = 180° = D\widehat{A}B + B\widehat{C}D$$

e, daí, $B\widehat{E}D = B\widehat{C}D$. Mas, aplicando o teorema do ângulo externo ao triângulo CDE, obtemos uma contradição. ■

No que segue, apresentamos duas aplicações importantes da proposição acima. Para a primeira delas, precisamos da seguinte nomenclatura: dado um triângulo não retângulo ABC, dizemos que o triângulo formado pelos pés de suas alturas é o **triângulo órtico** de ABC (cf figura 3.35).

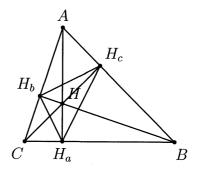



Figura 3.35: o triângulo órtico $H_aH_bH_c$ de ABC.

Proposição 3.40. Em todo triângulo acutângulo, o ortocentro coincide com o incentro do triângulo órtico.

Prova. Vamos nos referir à figura 3.35. Como $H\widehat{H}_aB + H\widehat{H}_cB = 90°+90° = 180°$, segue da proposição 3.39 que o quadrilátero HH_aBH_c é inscritível. Portanto, novamente por aquela proposição, temos

$$H\widehat{H}_aH_c = H\widehat{B}H_c = H_b\widehat{B}A = 90° - \widehat{A}.$$

Por outro lado, temos analogamente que $H\widehat{H}_aC + H\widehat{H}_bC = 180°$ e, daí, HH_aCH_b também é inscritível. Portanto, temos também

$$H\widehat{H}_aH_b = H\widehat{C}H_b = H_c\widehat{C}A = 90° - \widehat{A}.$$

O argumento acima provou que $H\widehat{H}_aH_c = H\widehat{H}_aH_b$, i.e., que o segmento HH_a é a bissetriz interna do ângulo $\angle H_cH_aH_b$ do triângulo órtico. Analogamente, HH_b e HH_c são bissetrizes dos outros dois ângulos do triângulo órtico, de maneira que H (o ortocentro de ABC) é também o incentro de $H_aH_bH_c$. ∎

Nossa segunda aplicação diz respeito à seguinte situação: dados, no plano, um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre qualquer das retas suportes dos lados de ABC, marcamos os pontos D, E e F, pés das perpendiculares baixadas de P às retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente. O triângulo DEF assim obtido é o **triângulo pedal** de P em relação a ABC. Por exemplo, o triângulo órtico de um triângulo (cf. figura 3.35) é o triângulo pedal do ortocentro do triângulo.

O resultado a seguir, conhecido como o **teorema de Simson-Wallace**[1], explica quando o triângulo pedal de um ponto é *degenerado* (i.e., quando D, E e F são colineares). Observamos, ainda, que tal resultado será de importância fundamental para o material da seção 7.4 (cf. teorema 7.33).

[1]Após os matemáticos escoceses dos séculos XVIII e XIX Robert Simson e William Wallace.

Proposição 3.41 (Simson-Wallace)**.** Dados um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre as retas suportes de seus lados, o triângulo pedal de P em relação a ABC é degenerado se, e só se, P estiver sobre o círculo circunscrito a ABC.

Prova. A fim de que P esteja situado sobre o círculo circunscrito a ABC, a única possibilidade é que P esteja situado em uma das regiões angulares $\angle BAC$, $\angle ABC$ ou $\angle BCA$ mas seja exterior ao triângulo ABC. Analogamente, a fim de que o triângulo pedal de P em relação a ABC possa ser degenerado, P deve ser exterior ao triângulo ABC e estar situado em uma de tais regiões angulares. Portanto, podemos, sem perda de generalidade, supor que P é exterior ao triângulo ABC e está situado na região angular $\angle ABC$ (cf. figura 3.36).

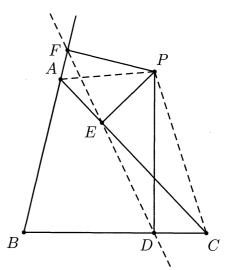



Figura 3.36: a reta de Simson-Wallace.

Sejam respectivamente D, E e F os pés das perpendiculares baixadas de P às retas suportes dos lados BC, AC e AB. Podemos também supor, sem perda de generalidade, que D e E estão sobre os lados BC

e AC, respectivamente, mas que F está sobre o prolongamento do lado AB. Como $P\widehat{F}A = P\widehat{E}A = 90°$, o quadrilátero $PFAE$ é inscritível. Analogamente, o quadrilátero $PEDC$ também é inscritível. Segue, daí, que

$$A\widehat{P}C - D\widehat{P}F = D\widehat{P}C - F\widehat{P}A = D\widehat{E}C - F\widehat{E}A,$$

i.e.,

$$A\widehat{P}C = D\widehat{P}F \Leftrightarrow D\widehat{E}C = F\widehat{E}A \Leftrightarrow D, E \text{ e } F \text{ são colineares.}$$

Por fim, calculando a soma dos ângulos do quadrilátero $BCPF$, obtemos $D\widehat{P}F = 180° - A\widehat{B}C$, de modo que

$$A\widehat{P}C = D\widehat{P}F \Leftrightarrow A\widehat{P}C + A\widehat{B}C = 180° \Leftrightarrow ABCP \text{ é inscritível.}$$

■

Nas notações da discussão acima, quando P estiver sobre o círculo circunscrito a ABC diremos que a reta que passa pelos pontos D, E e F é a **reta de Simson-Wallace** de P relativa a ABC.

Voltando à discussão do parágrafo inicial desta seção, observamos agora que nem todo quadrilátero convexo possui um círculo tangente a todos os seus lados (o leitor pode construir um exemplo facilmente). Quando tal ocorrer, diremos que o quadrilátero é **circunscritível** e que o círculo tangente a seus lados é o **círculo inscrito** no quadrilátero. O teorema a seguir, conhecido como o **teorema de Pitot**[2], dá uma caracterização útil dos quadriláteros circunscritíveis.

Teorema 3.42 (Pitot). Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB, BC, CD e DA, é circunscritível se, e só se,

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

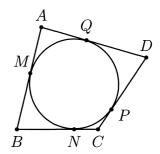



Figura 3.37: $ABCD$ circunscritível $\Rightarrow$ somas iguais dos lados opostos.

Prova. Suponha, primeiro, que $ABCD$ seja circunscritível, e sejam M, N, P e Q, respectivamente, os pontos de tangência dos lados AB, BC, CD e DA com o círculo inscrito em $ABCD$ (cf. figura 3.37).

Então, aplicando várias vezes o item (a) da proposição 3.28, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AM} + \overline{MB}) + (\overline{CP} + \overline{PD}) \\ &= \overline{AQ} + \overline{BN} + \overline{CN} + \overline{DQ} \\ &= (\overline{AQ} + \overline{DQ}) + (\overline{BN} + \overline{CN}) \\ &= \overline{AD} + \overline{BC}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ e que $ABCD$ não é circunscritível. Se O é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos $\angle DAB$ e $\angle ABC$ de $ABCD$, então, pela proposição 3.6, O é o centro de um círculo que tangencia os lados AD, AB e BC de $ABCD$ (cf. figura 3.38). Como estamos supondo que $ABCD$ não é inscritível, concluímos que tal círculo não é tangente ao lado CD de $ABCD$.

Seja E o ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{AD}$ tal que CE tangencia o círculo da figura 3.38 (nesta, estamos considerando o caso em que E está situado entre A e D; o outro caso é totalmente análogo). Pela

[2]Após Henri Pitot, engenheiro francês do século XVII.

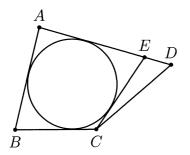



Figura 3.38: somas iguais dos lados opostos $\Rightarrow ABCD$ circunscritível.

primeira parte acima, segue que

$$\overline{AB} + \overline{CE} = \overline{AE} + \overline{BC}.$$

Mas, como $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ por hipótese, obtemos então

$$\overline{CD} - \overline{CE} = \overline{AD} - \overline{AE} = \overline{DE}$$

ou, ainda, $\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED}$. Por fim, tal igualdade contradiz a desigualdade triangular no triângulo CDE. ■

Problemas – Seção 3.5

1. Sobre cada lado do triângulo acutângulo ABC, construímos um círculo tendo o referido lado por diâmetro. Prove que tais círculos se intersectam dois a dois em seis pontos, três dos quais são os pés das alturas de ABC.

2. * Sejam ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e H_a, H_b e H_c os pés das alturas respectivamente relativas aos lados BC, CA e AB. Prove que:

   (a) $A\widehat{H_b}H_c = A\widehat{B}C$ e $A\widehat{H_c}H_b = A\widehat{C}B$.

   (b) $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{H_bH_c}$.

3. Considere, no plano, quatro retas que se intersectam duas a duas e tais que não há três passando por um mesmo ponto. Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos que tais retas determinam passam todos por um mesmo ponto.

4. $ABCD$ é um quadrilátero inscrito em um círculo Γ, de diâmetro BD. Sejam $M \in \Gamma$ tal que $M \neq A$ e $AM \perp BD$, e N o pé da perpendicular baixada de A a BD. Se a paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$ por N intersecta $\overleftrightarrow{CD}$ em P e $\overleftrightarrow{BC}$ em Q, prove que o quadrilátero $CPMQ$ é um retângulo.

5. Dado um triângulo ABC com círculo circunscrito Γ, sejam P um ponto situado sobre o arco $\overset{\frown}{AC}$ de Γ que não contém o vértice B e D o pé da perpendicular baixada de P à reta suporte do lado BC. Se $Q \neq P$ é o outro ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{DP}$ com o círculo Γ e r denota a reta de Simson-Wallace de P em relação a ABC, prove que $r \parallel \overleftrightarrow{AQ}$.

6. Sejam ABC um triângulo com círculo circunscrito Γ, e P e P' pontos situados sobre o arco $\overset{\frown}{AC}$ de Γ que não contém o ponto B. Se r e r' denotam, respectivamente, as retas de Simson-Wallace de P e P' em relação a ABC, prove que o ângulo entre r e r' é igual à metade da medida do arco $\overset{\frown}{PP'}$ de Γ que não contém o vértice A.

7. * Um polígono convexo é **inscritível** se existir um círculo passando por seus vértices, dito o **círculo circunscrito** ao polí-

gono[3]. Prove que um polígono convexo é inscritível se, e só se, as mediatrizes de seus lados concorrem em um único ponto.

8. Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Mostre que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD têm, com a diagonal AC, um mesmo ponto em comum.

9. * Um polígono convexo é **circunscritível** se existir um círculo tangente a seus lados, o qual é denominado um **círculo inscrito** no polígono. Prove que um polígono convexo é circunscritível se, e só se, as bissetrizes de seus ângulos internos passarem todas por um mesmo ponto. Nesse caso, conclua que há um único círculo inscrito no polígono.

10. Sejam $ABCD$ um quadrilátero inscritível e E o ponto de encontro das diagonais do mesmo. Sejam, ainda, M, N, P e Q os pés das perpendiculares baixadas de E aos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é circunscritível.

11. Se um hexágono convexo $A_1A_2A_3\ldots A_6$ é circunscritível, prove que

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_1}.$$

12. (IMO.) Sobre um círculo Γ são dados três pontos distintos A, B e C. Mostre como construir, com régua e compasso, um quarto ponto D sobre Γ, tal que o quadrilátero convexo $ABCD$ seja circunscritível.

[3]Tal círculo é, claramente, único, uma vez que circunscreve todo triângulo formado por três dos vértices do polígono.

CAPÍTULO 4

Proporcionalidade e Semelhança

Este capítulo desenvolve um conjunto de ferramentas que nos permitirão iniciar o estudo sistemático dos aspectos *métricos* da Geometria Euclidiana plana; grosso modo, o problema central subjacente, como veremos, é aquele de comparar razões de comprimentos de segmentos.

Dentre várias aplicações importantes e interessantes aqui reunidas, ressaltamos os teoremas de Thales e de Pitágoras, os quais se revelarão quase imprescindíveis doravante. Apresentamos, também, uma série de resultados clássicos, como por exemplo o estudo do círculo de Apolônio e os teoremas de concorrência e colinearidade de Ceva e Menelaus, os problemas clássicos sobre tangências de círculos, resolvidos por Ptolomeu, e alguns dos muitos teoremas de Euler sobre a geometria de triângulos.

4.1 O teorema de Thales

Consideremos a seguinte situação: temos, no plano, retas paralelas r, s e t (cf. figura 4.1). Traçamos, em seguida, retas u e u', a primeira

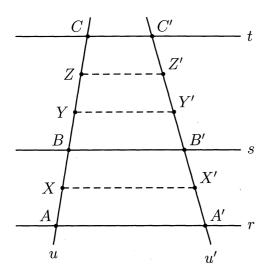



Figura 4.1: paralelas cortadas por transversais.

intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C, e a segunda intersectando r, s e t respectivamente em A', B' e C'.

Se tivermos $\overline{AB} = \overline{BC}$ (o que parece não ser o caso na figura acima referida), então, pelo teorema da base média de um trapézio (proposição 2.40), teremos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. De outra forma, já sabemos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1.$$

Suponha, agora, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional, digamos $\frac{2}{3}$, para exemplificar. Dividamos, então, os segmentos AB e BC respectivamente em duas e três partes iguais, obtendo pontos X, Y e Z em u,

tais que

$$\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$$

(cf. figura 4.1). Se traçarmos por X, Y e Z paralelas às retas r, s e t, as quais intersectam u' respectivamente em X', Y' e Z', então mais três aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem que

$$\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$$

e, daí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}.$$

Prosseguindo com tal raciocínio, suponha, agora, que fosse $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Então, uma pequena modificação do argumento acima (dividindo, inicialmente, AB e BC em m e em n partes iguais, respectivamente) garantiria que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$, de sorte que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}.$$

De outra forma, concluímos que a relação

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

é válida sempre que o primeiro (ou o segundo) membro for um número racional. A pergunta natural nesse momento é a seguinte: a igualdade das razões acima se mantém quando um dos membros da mesma for um número irracional? A resposta é sim, e, para entender o porquê disso, utilizaremos o problema 1.5.2 do volume 1.

Suponha que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x,$$

com x irracional. Escolha (pelo problema a que nos referimos) uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de racionais positivos, tal que

$$x < a_n < x + \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, marque (cf. figura 4.2) o ponto $C_n \in u$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n.$$

Seja t_n a reta paralela às retas r, s e t traçada por C_n e C'_n o ponto onde t_n intersecta u'. Como $a_n \in \mathbb{Q}$, um argumento análogo ao anterior garante que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} = a_n.$$

De outra forma, obtivemos que

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}$$

ou, ainda,

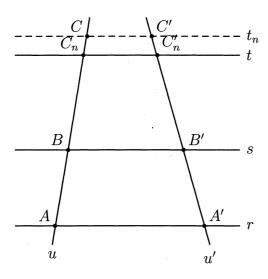



Figura 4.2: razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ irracional.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}. \qquad (4.1)$$

Observe, agora, que as desigualdades do primeiro membro acima garantem que, à medida em que n aumenta, os pontos C_n aproximam-se mais e mais do ponto C. Mas, como $t_n \parallel t$, segue então que os pontos C'_n aproximam-se mais e mais do ponto C', de maneira que a razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$ aproxima-se mais e mais da razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$. Abreviamos isso escrevendo

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \longrightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Por outro lado, utilizando notação análoga à da linha acima, podemos claramente inferir, a partir das desigualdades do segundo membro de (4.1), que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

(Lê-se $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$ *tende a* $\longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ *quando n tende a* $+\infty$.) Utilizando, agora, o fato (intuitivamente óbvio, e que será justificado rigorosamente no volume 3) de que uma sequência de reais não pode aproximar-se simultaneamente de dois reais distintos quando $n \to +\infty$, somos forçados a concluir que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

A discussão acima provou um dos resultados fundamentais da Geometria Euclidiana plana, conhecido como o **teorema de Thales**[1], o qual enunciamos formalmente a seguir:

Proposição 4.1 (Thales). Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Colecionamos, nos exemplos a seguir, duas aplicações interessantes do teorema de Thales.

[1]Após Thales de Mileto, matemático grego do século VII a.C.

Figura 4.3: Thales de Mileto, matemático e filósofo do século VII a.C. e o primeiro da antiguidade clássica grega.

Exemplo 4.2. Com o uso de régua e compasso divida o segmento AB, dado a seguir, em cinco partes iguais.

Solução.

A B

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace, pelo ponto A, uma reta arbitrária r.
2. Marque sobre r pontos $C_0 = A$, C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 tais que, para $0 \leq i \leq 4$, os comprimentos $\overline{C_iC_{i+1}}$ sejam todos iguais.
3. Para $1 \leq i \leq 4$, trace a paralela à reta $\overleftrightarrow{C_5B}$ passando por C_i.
4. Se D_i é a interseção de tal paralela com o segmento AB, então o teorema de Thales garante que os pontos D_1, D_2, D_3 e D_4 dividem AB em cinco partes iguais.

■

Para o próximo exemplo, dados reais positivos a, b e c, dizemos que o real positivo x é a **quarta proporcional** de a, b e c (nessa ordem) se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Caso a, b e c sejam os comprimentos de três segmentos, diremos também que um segmento de comprimento x dado como acima é a quarta proporcional dos segmentos de comprimentos a, b e c (nessa ordem).

Exemplo 4.3. Construa, com régua e compasso, a quarta proporcional dos segmentos dados abaixo.

Solução.

a b c

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace duas retas r e s, concorrentes no ponto A.
2. Marque sobre a reta r os segmentos AB e BC tais que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = c$; marque sobre a reta s o segmento AD, tal que $\overline{AD} = b$.
3. Trace, pelo ponto C, a paralela à reta $\overleftrightarrow{BD}$, a qual intersecta a reta s no ponto E. Pelo teorema de Thales, temos $\overline{DE} = \frac{bc}{a}$, conforme desejado.

■

Tão importante quanto o teorema de Thales, conforme enunciado acima, é sua *recíproca parcial* a seguir, também devida a Thales de Mileto.

Corolário 4.4. Sejam dados, no plano, retas r, s e pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$, com $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{C\}$. Se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C}}$, então $r \parallel s$.

Prova. Suponha que $B \in AC$ (cf. figura 4.4 – os demais casos são análogos). Trace, pelo ponto B, a reta $s' \parallel r$ e marque o ponto B'' como a interseção de s' com o segmento $A'C$. Pelo teorema de Thales,

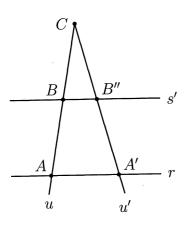



Figura 4.4: recíproca do teorema de Thales.

temos $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{B''C}}$, de maneira que nossas hipóteses fornecem

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{B''C}}.$$

Agora, segue do problema 2, página 157, que $B' = B''$ ou, o que é o mesmo, $s = s'$. Logo, $s \parallel r$. ■

O resultado a seguir é uma importante aplicação do teorema de Thales, sendo conhecido na literatura como o **teorema da Bissetriz**.

Proposição 4.5. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$.

(a) Se P é o pé da bissetriz interna e Q é o pé da bissetriz externa relativas ao lado BC, então

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.$$

(b) Sendo $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, temos

$$\begin{cases} \overline{BP} = \frac{ac}{b+c} \\ \overline{PC} = \frac{ab}{b+c}. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \overline{BQ} = \frac{ac}{|b-c|} \\ \overline{QC} = \frac{ab}{|b-c|}. \end{cases}$$

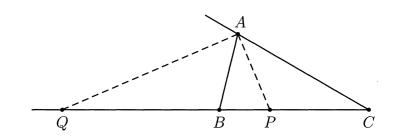



Figura 4.5: o teorema da Bissetriz.

Prova. O item (b) segue imediatamente de (a): sendo $\overline{BP} = x$ e $\overline{PC} = y$, temos $x + y = a$ e, pelo item (a), $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$. Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = \frac{c}{b} \end{cases}$$

obtemos $x = \frac{ac}{b+c}$ e $y = \frac{ab}{b+c}$. As demais fórmulas do item (b) são provadas de modo análogo.

Quanto ao item (a), mostremos que $\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$, deixando a prova (análoga) da igualdade $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$ a cargo do leitor (cf. problema 4, página 157).

Suponha (cf. figura 4.6) que $\overline{AB} < \overline{AC}$ (o caso $\overline{AB} > \overline{AC}$ pode ser tratado de modo análogo). Trace, pelo ponto B, a paralela à reta $\overleftrightarrow{AQ}$ e marque seu ponto de interseção B' com o lado AC do triângulo. Como $\overleftrightarrow{QA} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{AQ}$ é bissetriz de $\angle BAX$, obtemos

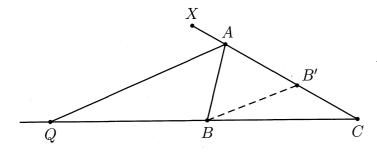



Figura 4.6: prova do teorema da bissetriz.

$$A\widehat{B}B' = B\widehat{A}Q = Q\widehat{A}X = B\widehat{B}'A.$$

Portanto, o triângulo ABB' é isósceles de base BB', de maneira que $\overline{B'A} = \overline{BA}$. Agora, aplicando o teorema de Thales às paralelas $\overleftrightarrow{QA}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$, intersectadas pelas retas $\overleftrightarrow{QC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, obtemos

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.$$

■

Problemas – Seção 4.1

1. As retas r, s e t são paralelas, com s entre r e t. As transversais u e v determinam, sobre r, s, t, pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente, tais que $\overline{AB} = x + 2$, $\overline{BC} = 2y$, $\overline{A'B'} = y$ e $\overline{B'C'} = (x - 10)/2$. Sabendo que $x + y = 18$, calcule $\overline{AB}$.

2. * Sejam P_1 e P_2 pontos no interior de um segmento AB, tais que
$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}.$$
Prove que os pontos P_1 e P_2 coincidem.

3. Dados segmentos de comprimentos a e b, dizemos que um segmento de comprimento x é a **terceira proporcional** de a e b (nessa ordem) se
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$
Mostre como construir, com régua e compasso, um segmento de tal comprimento x.

4. * Complete a prova do teorema da bissetriz.

5. * Sejam ABC um triângulo e P e M respectivamente os pés da bissetriz interna e da mediana relativas ao lado BC. Se P e M coincidirem, prove que ABC é isósceles de base BC.

6. Em um triângulo ABC, seja P o pé da bissetriz interna relativa a BC. Construa o triângulo com régua e compasso, conhecendo os comprimentos $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ e $\overline{AB}$.

7. Em um triângulo ABC, sejam P o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A. Marcamos, respectivamente sobre AB e AC, pontos M e N tais que $\overline{BM} = \overline{BP}$ e $\overline{CN} = \overline{CP}$. Prove que $MN \parallel BC$.

8. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecendo os comprimentos m_a, m_b e m_c das medianas de ABC, respectivamente relativas aos lados BC, AC e AB.

4.2 Semelhança de triângulos

Nesta seção, estudamos o conceito de semelhança de triângulos, o qual generaliza a noção de congruência de triângulos e se revelará de fundamental importância para tudo o que segue.

Dizemos que dois triângulos são **semelhantes** quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma (cf. figura 4.7).

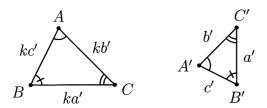



Figura 4.7: dois triângulos semelhantes.

Fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos *dilatar* e/ou *girar* e/ou *refletir* e/ou *transladar* um deles, obtendo o outro ao final de tais operações[2].

Na figura 4.7, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Assim,

[2]Tal ponto de vista pode ser tornado preciso por meio do estudo de *transformações geométricas*, mas não as abordaremos aqui. Todavia, sugerimos ao leitor interessado a maravilhosa coleção do professor I. M. Yaglom [15], [16], [17] e [18].

$\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$ e existe $k > 0$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

Tal real positivo k é denominado a **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, nessa ordem (observe que a razão de semelhança entre os triângulos $A'B'C'$ e ABC, nessa ordem, é $\frac{1}{k}$).

Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$ para denotar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

Se $ABC \sim A'B'C'$ na razão (de semelhança) k, é possível provar que k é também a razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes quaisquer dos triângulos ABC e $A'B'C'$ (nessa ordem); por exemplo, nas notações da figura 4.7, sendo M o ponto médio de BC e M' o ponto médio de $B'C'$, temos

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{M'A'}} = \frac{a/2}{a'/2} = \frac{a}{a'} = k$$

(a esse respeito, veja também o problema 3, página 168).

As três proposições a seguir estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes. Por tal razão, elas são conhecidas na literatura como os **casos de semelhança de triângulos** usuais. Como suas demonstrações são consequências relativamente simples da recíproca do teorema de Thales, faremos a prova do primeiro deles, deixando as demonstrações dos dois demais como exercícios para o leitor (cf. problema 1, página 168).

O resultado da proposição a seguir é conhecido como o **caso LLL** de semelhança de triângulos.

Proposição 4.6. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Figura 4.8: o caso de semelhança LLL.

Prova. Sendo k o valor comum das razões do enunciado, temos $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}$. Suponha, sem perda de generalidade, $k > 1$ e marque (cf. figura 4.9) o ponto $B'' \in AB$ tal que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$.

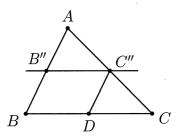



Figura 4.9: prova do caso de semelhança LLL.

Sendo C'' a interseção, com o lado AC, da reta que passa por B'' e é paralela ao lado BC, segue do teorema de Thales que

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k},$$

de maneira que $\overline{AC''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AC} = \overline{A'C'}$.

Trace, agora, a paralela ao lado AB passando por C'', a qual intersecta o lado BC no ponto D. Então, o quadrilátero $B''C''DB$ é um paralelogramo, de sorte que, novamente pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k}.$$

Logo, $\overline{B''C''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} = \overline{B'C'}$.

A discussão acima mostrou que

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC''} = \overline{A'C'} \quad \text{e} \quad \overline{B''C''} = \overline{B'C'},$$

i.e., que os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, pelo caso LLL de congruência. Portanto, temos

$$\widehat{B} = A\widehat{B}C = A\widehat{B''}C'' = A'\widehat{B'}C' = \widehat{B'},$$

e, analogamente, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$. ■

O critério para a semelhança de dois triângulos constante da próxima proposição é conhecido como o **caso LAL** de semelhança.

Proposição 4.7. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \quad \text{e} \quad \widehat{B} = \widehat{B'}.$$

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$.

Por fim, a proposição a seguir apresenta o **caso AA** de semelhança de triângulos.

Proposição 4.8. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad \text{e} \quad \widehat{B} = \widehat{B'}.$$

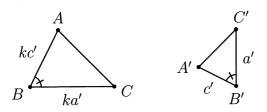



Figura 4.10: o caso de semelhança LAL.

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

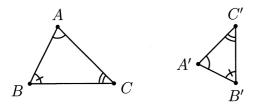



Figura 4.11: o caso de semelhança AA.

Como corolário dos casos de semelhança acima, estabelecemos, na proposição a seguir, as **relações métricas em triângulos retângulos**.

Proposição 4.9. Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = x$, $\overline{BH} = y$ e $\overline{AH} = h$, temos:

(a) $ah = bc$.

(b) $ax = b^2$ e $ay = c^2$.

(c) $a^2 = b^2 + c^2$.

(d) $xy = h^2$.

Prova.
(a) e (b). Como $A\widehat{H}B = C\widehat{A}B$ e $A\widehat{B}H = C\widehat{B}A$ (cf. figura 4.12), os triângulos BAH e BCA são semelhantes pelo caso AA, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow C$, $H \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B$. Assim,

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \text{ e } \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

ou, ainda,

$$\frac{y}{c} = \frac{c}{a} \text{ e } \frac{h}{b} = \frac{c}{a}.$$

A relação $ax = b^2$ é provada de maneira análoga.

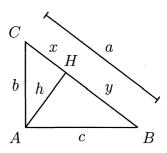



Figura 4.12: relações métricas num triângulo retângulo.

(c) Somando membro a membro as duas relações do item (b), obtemos a igualdade $a(x + y) = b^2 + c^2$. Mas, uma vez que $x + y = a$, nada mais há a fazer.

(d) Multiplicando membro a membro as duas relações do item (b), obtemos $a^2 \cdot xy = (bc)^2$ ou, ainda,

$$xy = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 = h^2,$$

onde utilizamos o item (a) na última igualdade acima. ■

Como já mencionamos à seção 1.4 do volume 1, o item (c) da proposição acima é o conteúdo do famoso **teorema de Pitágoras**. Apresentamos, no que segue, algumas consequências importantes do mesmo, a primeira das quais já foi utilizada na seção acima referida.

Corolário 4.10. As diagonais de um quadrado de lado a medem $a\sqrt{2}$.

Prova. Se $ABCD$ é um quadrado de lado a e diagonais AC e BD (cf. figura 4.13), então o triângulo ABC é retângulo e isósceles. Daí, o teorema de Pitágoras fornece

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

■

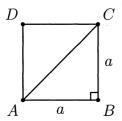



Figura 4.13: diagonal de um quadrado em função de seu lado.

Corolário 4.11. As alturas de um triângulo equilátero de lado a medem $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

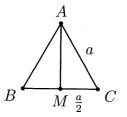



Figura 4.14: alturas de um triângulo equilátero.

Prova. Sejam ABC um triângulo equilátero de lado a e M o ponto médio do lado BC (cf. figura 4.14). O problema 8 da página 45), garante que $AM \perp BC$. Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ACM, obtemos

$$\overline{AM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CM}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4},$$

e segue o resultado. ■

O próximo exemplo utiliza o item (d) da proposição 4.9 para resolver *geometricamente* uma equação do segundo grau de raízes positivas.

Exemplo 4.12. Dados segmentos de comprimentos s e p, tais que $s > 2p$, construa, com régua e compasso, segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação $x^2 - sx + p^2 = 0$.

Solução.

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace uma reta r e marque, sobre a mesma, pontos B e C tais que $\overline{BC} = s$. Em seguida, construa um semicírculo Γ de diâmetro BC.

2. Trace a reta r', paralela à reta r e à distância p de r, a qual intersecta Γ nos pontos A e A' (uma vez que $p < \frac{s}{2}$).

3. Agora, a discussão que sucede a prova da proposição 3.19 garante que o triângulo ABC é retângulo em A.

4. Se H é o pé da perpendicular baixada de A a BC, então $\overline{BH} + \overline{CH} = s$ e o item (d) da proposição 4.9 garante que $\overline{BH} \cdot \overline{CH} = p^2$. Logo, pela proposição 2.13 do volume 1, os comprimentos $\overline{BH}$ e $\overline{CH}$ são as raízes da equação do segundo grau do enunciado.

■

Terminamos esta seção estabelecendo uma recíproca do teorema de Pitágoras (a esse respeito, veja também a proposição 7.24).

Proposição 4.13. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então ABC é retângulo em A.

Prova. Seja H o pé da altura relativa a BC. Há dois casos essencialmente distintos:

(a) $B \in CH$ (cf. figura 4.15): neste caso, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AHC, obtemos

$$b^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 > \overline{CH}^2 \geq \overline{BC}^2 = a^2 = b^2 + c^2$$

e, daí, $0 \geq c^2$, o que é um absurdo.

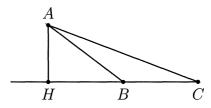



Figura 4.15: recíproca do teorema de Pitágoras - caso (a)

(b) $H \in BC$ (cf. figura 4.16): sejam $\overline{AH} = h$, M o ponto médio de BC e $\overline{BH} = x$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

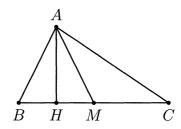



Figura 4.16: recíproca do teorema de Pitágoras - caso (b)

$H \in BM$. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos AHC e AHB, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 = (\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2) + (\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2) = 2h^2 + (a - x)^2 + x^2,$$

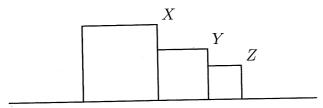
donde $h^2 = ax - x^2$. Mas aí, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AHM, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{HM}^2 = h^2 + (\overline{BM} - \overline{BH})^2 \\ &= (ax - x^2) + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \frac{a^2}{4},\end{aligned}$$

de sorte que $\overline{AM} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Portanto, M equidista dos vértices de ABC, e a proposição 3.30 garante que ABC é retângulo em A. ∎

Problemas – Seção 4.2

1. * Prove que os conjuntos de condições elencados em cada uma das Proposições 4.7 e 4.8 são realmente suficientes para garantir a semelhança dos triângulos ABC e $A'B'C'$.

2. Na figura abaixo, os três quadriláteros mostrados são quadrados e os pontos X, Y e Z são colineares. Calcule, em centímetros, a medida do lado do quadrado menor, sabendo que os outros dois quadrados têm lados medindo 4cm e 6cm.

3. * Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos semelhantes, com razão de semelhança k. Sejam, ainda, m_a e m'_a, h_a e h'_a, β_a e β'_a respectivamente os comprimentos das medianas, alturas e bissetrizes internas relativas a A e A', também respectivamente. Prove que
$$\frac{m_a}{m'_a} = \frac{h_a}{h'_a} = \frac{\beta_a}{\beta'_a} = k.$$

4. * O triângulo ABC é retângulo em A e o ponto $P \in BC$ é o pé da bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. Calcule a distância de P ao lado AC em função de $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$.

5. Seja ABC um triângulo retângulo em A e tal que $\overline{AB} = 1$. A bissetriz do ângulo $\angle BAC$ intersecta o lado BC em D. Sabendo que a reta r, que passa por D e é perpendicular a AD, intersecta o lado AC em seu ponto médio, calcule o comprimento do lado AC.

6. Seja $ABCD$ um paralelogramo de diagonais AC e BD e lados $\overline{AB} = 10$cm, $\overline{AD} = 24$cm. Sejam, ainda, E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas desde A aos lados BC e CD. Sabendo que $\overline{AF} = 20$cm, calcule o comprimento de AE.

7. Dois círculos, de raios $r < R$, são tangentes exteriormente em P. Sabendo que tais círculos também tangenciam os lados de um ângulo de vértice A, calcule $\overline{AP}$ em termos de r e R.

8. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, e M, N e P pontos respectivamente sobre AB, BC e AC, tais que $AMNP$ é um losango.

   (a) Calcule, em termos de a, b e c, o comprimento do lado do losango.

   (b) Mostre como construir com régua e compasso a posição do ponto M.

9. Seja ABC um triângulo equilátero de lado a e M o ponto médio de AB. Escolhemos um ponto D sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, com C entre B e D, de modo que $\overline{CD} = \frac{a}{2}$. Se $AC \cap DM = \{E\}$, calcule $\overline{AE}$ em função de a.

10. Em um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$, os lados não paralelos são AD e BC. Pelo ponto de concurso P das diagonais de $ABCD$, traçamos o segmento MN paralelos às bases, com $M \in AD$ e $N \in BC$. Prove que P é o ponto médio de MN e que $\overline{MN}$ é igual à *média harmônica* de a e b, i.e., prove que $\overline{MN} = \frac{2ab}{a+b}$.

11. * Sobre o lado BC de um triângulo ABC marcamos um ponto Z. Em seguida, traçamos por B e C respectivamente as retas r e s, ambas paralelas a $\overleftrightarrow{AZ}$. Se $\overleftrightarrow{AC} \cap r = \{X\}$ e $\overleftrightarrow{AB} \cap s = \{Y\}$, prove que
$$\frac{1}{\overline{BX}} + \frac{1}{\overline{CY}} = \frac{1}{\overline{AZ}}.$$

12. Em um trapézio $ABCD$, de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC, seja M o ponto médio da base CD. O segmento AM intersecta a diagonal BD em F. Traçamos por F a reta r, paralela às bases. Se r intersecta os segmentos AD, AC e BC respectivamente em E, G e H, prove que $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$.

13. * (OCM.) Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Se $A\widehat{B}C = 2A\widehat{C}B$, mostre que $b^2 = c(a+c)$.

14. (OCM.) Um triângulo ABC é tal que $A\widehat{C}B = 2B\widehat{A}C$ e $\overline{AC} = 2\,\overline{BC}$. Mostre que tal triângulo é retângulo.

15. * (OCS - adaptado.) Sejam $\Gamma(O;R)$ o círculo circunscrito a um triângulo ABC e H_a o pé da altura de ABC relativa ao lado BC. Se A' é o simétrico de A em relação a O, prove que $AA'C \sim ABH_a$. Conclua, a partir daí, que se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AH_a} = h_a$, então
$$h_a = \frac{bc}{2R}.$$

16. As retas r e s são tangentes ao círculo circunscrito ao triângulo acutângulo ABC respectivamente em B e em C. Sendo D, E e F os pés das perpendiculares baixadas de A respectivamente a BC e às retas r e s, prove que
$$\overline{AD}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{AF}.$$

17. No retângulo $ABCD$, de lados $\overline{AB} = 4$m e $\overline{BC} = 3$m, marcamos sobre a diagonal AC o ponto M tal que $DM \perp AC$. Calcule o comprimento do segmento AM

18. Seja ABC um triângulo retângulo de catetos b e c e altura h relativa à hipotenusa. Prove que
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

19. * Dados reais positivos a e b, considere, no plano, um segmento AB de comprimento $a+b$ e um ponto H sobre o mesmo, tal que $\overline{AH} = a$ e $\overline{BH} = b$. Trace um semicírculo de diâmetro AB e, em seguida, marque o ponto C, obtido como a interseção de tal semicírculo com a reta perpendicular a AB e passando pelo ponto H.

    (a) Mostre que $\overline{CH} = \sqrt{ab}$.

    (b) Conclua que a desigualdade (7.6) do volume 1 é essencialmente equivalente à desigualdade triangular no triângulo (possivelmente degenerado) CHO, onde O é o ponto médio de AB.

20. * Dados, no plano, segmentos de comprimentos a e b, construa com régua e compasso um segmento de comprimento $\sqrt{ab}$.

21. Sejam M, N e P pontos respectivamente sobre os lados BC, CA e AB de um triângulo equilátero ABC de lado a, tais que

$\overline{BM} = \overline{CN} = \overline{AP} = \frac{a}{3}$. Mostre que o triângulo MNP também é equilátero e que seus lados são perpendiculares aos lados de ABC.

22. Dados segmentos de comprimentos a, b e c, construa com régua e compasso um segmento de comprimento $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, admitindo que a expressão sob o sinal da raiz seja positiva.

23. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC, retângulo em A. Sabendo que AB e CD medem, respectivamente, 12cm e 4cm, e que $ABCD$ é circunscritível, calcule as distâncias dos vértices B e C ao centro do círculo inscrito em $ABCD$.

24. A hipotenusa BC de um triângulo retângulo ABC é dividida em quatro segmentos congruentes pelos pontos D, E e F. Se $\overline{BC} = 20$cm, calcule, em centímetros, o valor da soma $\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2$.

25. Identifique e construa, com régua e compasso, o LG dos pontos médios das cordas de comprimento l de um círculo $\Gamma(O; R)$ dado.

26. Sejam Γ um círculo de centro O e raio R no plano. Prove que o LG dos pontos do plano a partir dos quais podemos traçar tangentes de comprimento l a Γ é o círculo de centro O e raio $\sqrt{R^2 + l^2}$.

27. (OCM.) Um pedestre, situado a 25m de um edifício, o visualiza sob um certo ângulo. Em seguida, ele se afasta mais 50m do edifício e nota que, ao assim fazer, o novo ângulo de visualização é exatamente a metade do anterior. Calcule a altura do edifício.

28. (OCM.) As retas r, s e t são paralelas, estando s entre r e t, de tal modo que a distância entre r e s é 3m e a distância entre s e t é 1m. O triângulo ABC é equilátero e tem um vértice sobre cada uma das retas r, s, t. Calcule o comprimento de seu lado.

29. (OCM.) Duas torres, uma com 30m de altura e a outra com 40m de altura, estão situadas a 50m uma da outra. Entre ambas as torres há uma fonte, para a qual dois passarinhos partem, em um mesmo instante e com velocidades iguais, do alto de cada torre. Sabendo que os passarinhos chegam à fonte simultaneamente, calcule a distância da fonte à base da torre mais baixa.

30. Se os comprimentos de dois dos lados de um triângulo são 7 e $5\sqrt{2}$, e se o ângulo compreendido entre tais lados mede $135°$, calcule o comprimento do terceiro lado.

31. Dado um ponto P no interior de um retângulo $ABCD$, de diagonais AC e BD, prove que $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$.

32. $ABCD$ é um quadrado de lado 10 e P é um ponto sobre seu círculo circunscrito. Calcule os possíveis valores da soma $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$.

33. Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, prove que as somas dos quadrados dos comprimentos dos pares de lados opostos são iguais.

34. Considere, no plano, uma reta s e dois círculos de raios R e r, situados em um mesmo semiplano dos que s determina, e tangentes a s e exteriormente entre si. Considere um terceiro círculo, tangente exteriormente aos dois primeiros e também tangente a s. Sendo x o raio desse terceiro círculo, prove que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

35. Seja s a reta numerada e α um dos semiplanos, dentre os que s determina. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, trace o círculo de raio $\frac{1}{2}$, contido em α e tangente a s em n. Em seguida, sendo Γ_1 e Γ_2 dois círculos já traçados e tangentes exteriormente, trace todos os círculos tangentes a s e a Γ_1 e Γ_2. Repetindo essa operação recursivamente, prove que o conjunto dos pontos de tangência de tais círculos com s está contido no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais[3].

4.3 Algumas aplicações

Esta seção coleciona algumas aplicações interessantes de semelhanças de triângulos, pagando um merecido tributo aos matemáticos Apolônio de Perga, Claudius Ptolomeu e Leonhard Euler.

Nosso primeiro resultado estabelece uma recíproca do teorema da Bissetriz. Para o enunciado do mesmo, recorde que, em todo triângulo, as bissetrizes interna e externa relativas a um mesmo vértice são perpendiculares.

Proposição 4.14. Seja ABC um triângulo e P e Q pontos sobre a reta BC, com $P \in BC$ e $Q \notin BC$. Se

$$P\widehat{A}Q = 90^\circ \text{ e } \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}},$$

então AP é a bissetriz interna e AQ é a bissetriz externa de $\angle BAC$.

Prova. Trace, pelo ponto P, a paralela a $\overleftrightarrow{AQ}$, e sejam U e V seus pontos de interseção com $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente (cf. figura 4.17). O corolário 2.18 garante que $B\widehat{U}P = B\widehat{A}Q$ e $P\widehat{V}C = Q\widehat{A}C$; por outro lado, $U\widehat{B}P = A\widehat{B}Q$ (pois os ângulos correspondentes são opostos pelo

[3]Pode ser provado que o conjunto dos pontos de tangência assim obtidos coincide com $\mathbb{Q}$. Referimos o leitor a [14] para uma discussão sobre esse ponto.

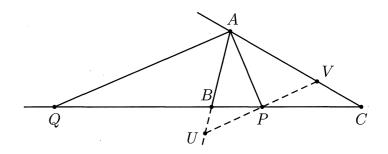



Figura 4.17: recíproca do teorema da Bissetriz.

vértice) e $P\widehat{C}V = Q\widehat{C}A$. Portanto, pelo caso AA, temos $BUP \sim BAQ$ e $PCV \sim QCA$, de maneira que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{PU}}{\overline{QA}} \text{ e } \frac{\overline{PC}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{PV}}{\overline{AQ}}.$$

Mas, como $\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{QC}}$ por hipótese, as relações de semelhança acima nos dão

$$\frac{\overline{PU}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{PV}}{\overline{AQ}},$$

quer dizer, $\overline{PU} = \overline{PV}$. Agora, de $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{UV} \parallel \overleftrightarrow{AQ}$ temos $\overleftrightarrow{UV} \perp \overleftrightarrow{AP}$, de sorte que AP é mediana e altura do triângulo AUV. Logo, o problema 8, página 45, garante que AP também é bissetriz de $\angle UAV$ e, daí, de $\angle BAC$.

Por fim, como a bissetriz externa relativa a A é perpendicular à interna, temos que AQ é bissetriz externa de $\angle BAC$. ■

Estamos, agora, em condições de enunciar e provar o teorema a seguir, devido a Apolônio de Perga.

Teorema 4.15 (Apolônio). Dados um real positivo $k \neq 1$ e pontos B e C no plano, o LG dos pontos A do plano tais que $\overline{AB} = k \cdot \overline{AC}$

Figura 4.18: Apolônio de Perga, matemático grego do século III a.C. Apolônio deu grandes contribuições à Geometria Euclidiana, notadamente ao estudo das *cônicas.*

é o círculo com diâmetro PQ, onde $P \in BC$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC} \setminus BC$ são os pontos tais que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = k.$$

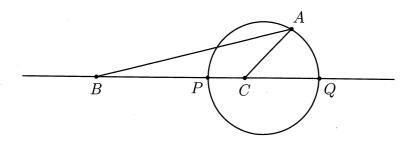



Figura 4.19: círculo de Apolônio sobre BC na razão k.

Prova. Se $A \neq P, Q$ é um ponto tal que $\overline{AB} = k \cdot \overline{AC}$, então uma fácil variante do problema 2, página 157, garante que $A \notin \overleftrightarrow{BC}$. Sejam, pois $P', Q' \in \overleftrightarrow{BC}$ respectivamente os pés das bissetrizes interna e externa

de ABC, traçadas a partir de A. Segue do teorema da Bissetriz que

$$\frac{\overline{BP'}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{BQ'}}{\overline{Q'C}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = k$$

e, novamente pelo problema 2, página 157, obtemos $P' = P$ e $Q' = Q$. Mas, como $P'\widehat{A}Q' = 90°$, segue que A pertence ao círculo de diâmetro PQ.

Reciprocamente, se $A \neq P, Q$ é um ponto sobre o círculo de diâmetro PQ, então $A \notin \overleftrightarrow{BC}$ e $P\widehat{A}Q = 90°$. Como $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = k$, segue da proposição anterior que, no triângulo ABC, AP é bissetriz interna e AQ bissetriz externa. Portanto, novamente pelo teorema da Bissetriz, temos

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = k,$$

de sorte que A pertence ao lugar geométrico desejado. ■

O lugar geométrico descrito no enunciado do teorema anterior é conhecido na literatura como o **círculo de Apolônio** relativo a (B, C), na razão $k \neq 1$. Em particular, observe que os círculos de Apolônio relativos a (B, C) e (C, B), ambos na razão $k \neq 1$, são distintos. Para uma outra prova do resultado anterior, referimos o leitor ao problema 5, página 288.

O exemplo a seguir ensina como construir facilmente o círculo de Apolônio relativo a um par ordenado de pontos dados, numa razão $k \neq 1$ também dada.

Exemplo 4.16. Nas notações da figura abaixo, construa o círculo de Apolônio relativo a (B, C), na razão $\frac{2}{3}$.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Trace retas paralelas r e s, ambas diferentes de $\overleftrightarrow{BC}$ e tais que $B \in r$ e $C \in s$.

2. Fixe um segmento arbitrário, de comprimento u, e marque sobre r um ponto X tal que $\overline{BX} = 2u$ e sobre s os pontos Y e Z tais que $\overline{CY} = \overline{CZ} = 3u$; nomeie Y e Z de tal forma que X e Y estejam em um mesmo semiplano, daqueles determinados pela reta $\overleftrightarrow{BC}$.

3. Marque os pontos P e Q como as interseções da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com as retas $\overleftrightarrow{XZ}$ e $\overleftrightarrow{XY}$, respectivamente.

4. Pelo caso AA, temos as semelhanças de triângulos $XBP \sim ZCP$ e $XQB \sim YQC$. Por outro lado, a partir delas, obtemos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CZ}} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CY}} = \frac{2}{3},$$

de sorte que o LG procurado é o círculo de diâmetro PQ.

■

Nossa próxima aplicação de semelhanças é um famoso teorema sobre quadriláteros inscritíveis, devido a Cláudio Ptolomeu.

Figura 4.20: Cláudio Ptolomeu, matemático e astrônomo grego do século II d.C., deu grandes contribuições à Geometria Euclidiana. Ptolomeu é mais conhecido por seus trabalhos como astrônomo, principalmente por haver proposto a (equivocada) Teoria Geocêntrica, segundo a qual a Terra ocupava o centro do Universo. Tal teoria foi aceita como um dogma pela Igreja Católica por cerca de 1400 anos, tendo sido a responsável pelo julgamento de Galileu Galilei no Tribunal da Santa Inquisição.

Teorema 4.17 (Ptolomeu). Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD, então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Prova. Marque o ponto P sobre a diagonal BD, tal que $P\widehat{C}D = A\widehat{C}B$ (cf. figura 4.21). Como $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$, os triângulos ABC e DPC são semelhantes por AA e, daí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{CD}}.$$

Analogamente, também são semelhantes os triângulos ADC e BPC, de maneira que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}.$$

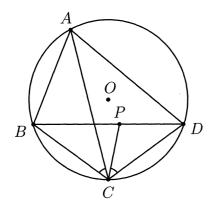



Figura 4.21: o teorema de Ptolomeu.

Agora, as duas relações obtidas acima nos dão

$$\overline{BD} = \overline{BP} + \overline{PD} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC}},$$

como desejado. ■

Colecionamos, no corolário a seguir, uma consequência interessante do teorema de Ptolomeu (a esse respeito, veja também o problema 15, página 122).

Corolário 4.18. Se ABC é um triângulo equilátero e P é um ponto qualquer sobre o arco menor $\widehat{BC}$ de seu círculo circunscrito, então $\overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PA}$.

Prova. Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $PBAC$ da figura 4.22, obtemos

$$\overline{AB} \cdot \overline{PC} + \overline{AC} \cdot \overline{PB} = \overline{AP} \cdot \overline{BC}.$$

Em seguida, cancelando os comprimentos iguais $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, obtemos o resultado desejado. ■

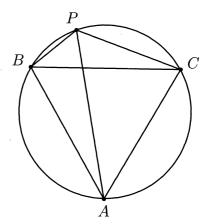



Figura 4.22: um corolário útil do teorema de Ptolomeu.

Faremos uma aplicação interessante do teorema de Ptolomeu na seção 5.2 (cf. teorema 5.13). Por outro lado, uma generalização do mesmo será apresentada na seção 7.4 (cf. teorema 7.33).

Dando prosseguimento, prestamos um justo tributo à genialidade de Leonhard Euler, apresentando dois belos teoremas seus (para um terceiro, veja o teorema 4.31 da próxima seção).

Teorema 4.19 (Euler). Se O, G e H são respectivamente o circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo ABC, então:

(a) $\overline{AH} = 2\overline{OM}$, onde M é o ponto médio de BC.

(b) H, G e O são colineares, com $G \in HO$ e $\overline{HG} = 2\overline{GO}$.

Prova.
(a) Se N é o ponto médio de AC (cf. figura 4.24), então o teorema da base média nos dá $MN \parallel AB$ e $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Portanto, $O\widehat{M}N = H\widehat{A}B$ e $O\widehat{N}M = H\widehat{B}A$, de sorte que os triângulos OMN e HAB são semelhantes e, daí,

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}.$$

Figura 4.23: o suiço Leonhard Euler, que viveu do século XVIII, é até hoje considerado o matemático que mais publicou trabalhos relevantes. Suas contribuições variam, impressionantemente, da Geometria à Combinatória, passando pela Teoria dos Números e Física. Em cada uma dessas áreas do conhecimento há pelo menos um celebrado *teorema de Euler*.

(b) Se G' é o ponto de interseção dos segmentos AM e HO, então $O\widehat{G'}M = H\widehat{G'}A$. Também, como $\overleftrightarrow{OM} \parallel \overleftrightarrow{AH}$, segue que $O\widehat{M}G' = H\widehat{A}G'$. Portanto, os triângulos $MOG' \sim AHG'$ por AA e, daí,

$$\frac{\overline{OG'}}{\overline{HG'}} = \frac{\overline{MG'}}{\overline{AG'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{AH}} = \frac{1}{2},$$

onde utilizamos o item (a) na última igualdade acima. Segue daí e da proposição 2.38 que G e G' são pontos do segmento AM, tais que

$$\frac{\overline{AG'}}{\overline{MG'}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{MG}}.$$

Portanto, pelo problema 2, página 157, devemos ter $G = G'$. ∎

Nas notações do resultado anterior, dizemos que $\overleftrightarrow{HO}$ é a **reta de Euler** e HO é a **mediana de Euler** do triângulo ABC.

Teorema 4.20 (Euler)**.** Em todo triângulo, o circuncentro do triângulo órtico coincide com o ponto médio da mediana de Euler. Ademais, o círculo circunscrito ao triângulo órtico é também circunscrito ao triângulo medial, passa pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro e tem raio igual à metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo.

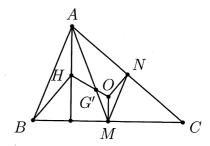



Figura 4.24: a reta de Euler $\overleftrightarrow{HO}$ de ABC.

Prova. Sejam ABC um triângulo com circuncentro O e ortocentro H, tal que M é o ponto médio de BC, A' é o ponto médio de AH e R é o raio do círculo circunscrito a ABC (cf. figura 4.25). Como $AA' \parallel OM$ e (pelo teorema anterior) $\overline{AA'} = \overline{OM}$, o problema 1, página 85, garante que o quadrilátero $AA'MO$ é um paralelogramo. Portanto, $\overline{A'M} = \overline{AO} = R$.

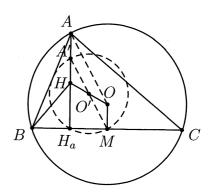



Figura 4.25: o círculo de Euler de ABC.

Por outro lado, como $A'H \parallel QM$ e (também pelo teorema anterior) $\overline{A'H} = \overline{OM}$, segue novamente do problema 1, página 85, que o quadrilátero $A'HMO$ é um paralelogramo. Portanto, suas diagonais cortam-se ao meio, de forma que, sendo O' o ponto médio de HO, concluímos que O' também é médio de $A'M$. Assim,

$$\overline{O'A'} = \overline{O'M} = \frac{1}{2}\overline{A'M} = \frac{R}{2}.$$

Seja, agora, H_a o pé da altura relativa a BC. Como em todo triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da mesma, no triângulo $A'H_aM$ temos

$$\overline{O'H_a} = \frac{1}{2}\overline{A'M} = \frac{R}{2}.$$

Em particular, o círculo de centro O' e raio igual a $\frac{R}{2}$ passa por A', M e H_a. Por fim, como o mesmo argumento é válido para os outros seis pontos em questão, nada mais há a fazer. ■

O círculo descrito no resultado anterior é conhecido na literatura como o **círculo de Euler**, ou **círculo dos nove pontos** do triângulo ABC.

Problemas – Seção 4.3

1. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecendo as posições dos vértices B e C e do pé da bissetriz interna relativa a A, bem como o comprimento b do lado AC.

2. De um triângulo ABC conhecemos as posições dos vértices B e C e do pé da bissetriz interna relativa ao vértice A, bem como o comprimento l de tal bissetriz. Explique como obter a posição do vértice A.

3. Construa o triângulo ABC, conhecidos o comprimento a do lado BC, o comprimento m_a da mediana relativa a BC e sabendo que $\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AC}$.

4. * Seja $k \neq 1$ um real positivo. Prove que o círculo de Apolônio relativo a (B, C) e na razão k tem raio igual a $\frac{k}{|k^2-1|} \cdot \overline{BC}$.

5. (Romênia.) $ABCD$ é um quadrilátero de diagonais AC e BD, inscrito em um círculo Γ. Mostre que existe $P \in \Gamma$ tal que $\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{PB} + \overline{PD}$.

6. * Seja ABC um triângulo cujos ângulos internos são menores que 120°. Construa, exteriormente a ABC, triângulos equiláteros BCD, ACE e ABF (os quais são conhecidos como os **Triângulos Napoleônicos**[4] de ABC). Prove que:

   (a) Os círculos circunscritos aos triângulos BCD, ACE e ABF passam por um mesmo ponto P, denominado o **Ponto de Fermat**[5] de ABC.

[4]Algumas fontes atribuem a descoberta dos fatos listados nos itens (a) e (b) deste problema ao imperador francês Napoleão Bonaparte, ao passo que outras sugerem que tal autoria é improcedente.

[5]Após Pierre S. de Fermat, matemático francês do século XVII.

(b) $A\widehat{P}F = F\widehat{P}B = B\widehat{P}D = D\widehat{P}C = C\widehat{P}E = E\widehat{P}A = 60°$.

(c) $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$.

7. São dados um natural n e um círculo Γ de raio 1. Se AB é um diâmetro de Γ, prove que existem pontos $C_1, \ldots, C_n \in \Gamma$ tais que $\overline{AC_i}, \overline{BC_i} \in \mathbb{Q}$, para $1 \leq i \leq n$.

8. (IMO - adaptado.) Dado $n \in \mathbb{N}$, mostre que existem um círculo Γ e pontos $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$ tais que $\overline{A_iA_j} \in \mathbb{N}$, para $1 \leq i < j \leq n$.

9. (Brasil.) Em um paralelogramo $ABCD$, de diagonais AC e BD, denotamos por H o ortocentro do triângulo ABD e por O o circuncentro do triângulo BCD. Prove que os pontos H, O e C são colineares.

10. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecendo as posições do circuncentro O, do ortocentro H e do ponto médio M do lado BC.

11. Em um triângulo não equilátero ABC, de ortocentro H e circuncentro O, prove que a mediatriz do segmento HO e a bissetriz interna relativa ao lado BC intersectam-se sobre o círculo circunscrito ao triângulo AHO.

12. Em um quadrilátero inscritível $ABCD$, de diagonais AC e BD, sejam H_1 e H_2 os ortocentros dos triângulos ACD e BCD, respectivamente. Prove que o segmento $\overleftrightarrow{H_1H_2} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{H_1H_2} = \overline{AB}$.

13. (Estados Unidos.) Em um triângulo ABC de ortocentro H e circuncentro O, temos $\overline{AO} = \overline{AH}$. Calcule as possíveis medidas do ângulo $B\widehat{A}C$.

4.4 Colinearidade e concorrência

Nesta seção, apresentamos dois teoremas clássicos de colinearidade e concorrência, bem como algumas aplicações importantes dos mesmos. Para tanto, adotaremos, aqui, as seguintes convenções:

i. dados pontos distintos X e Y no plano, XY denota o segmento ordinário que une X e Y, **orientado** de X para Y. Em particular, escrevemos $XY = -YX$ como lembrete de que os segmentos orientados XY e YX têm orientações distintas.

ii. dados pontos colineares X, Y e Z, denotamos

$$\frac{XY}{YZ} = \begin{cases} \frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}, & \text{se } XY \text{ e } YZ \text{ têm orientações iguais} \\ -\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}, & \text{se } XY \text{ e } YZ \text{ têm orientações distintas} \end{cases}.$$

De posse das notações acima, podemos enunciar e provar nosso primeiro resultado, devido ao matemático grego dos séculos I e II da era Cristã Menelaus de Alexandria, sendo conhecido na literatura como o **teorema de Menelaus**.

Teorema 4.21 (Menelaus)**.** Seja ABC um triângulo e A', B' e C' pontos sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC. Então:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1 \quad (4.2)$$

se, e só se, os pontos A', B' e C' forem colineares.

Prova. Inicialmente, suponha (cf. figura 4.26) que $A' \in \overrightarrow{CB} \setminus BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ e que os pontos A', B' e C' são colineares (os demais casos são totalmente análogos). Marque o ponto $P \in \overleftrightarrow{A'B'}$,

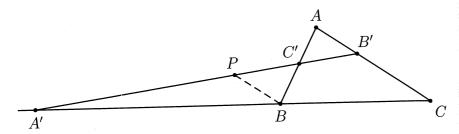



Figura 4.26: o teorema de Menelaus.

tal que $\overleftrightarrow{BP} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Então, $A'BP \sim A'CB'$ e $PBC' \sim B'AC'$, de sorte que

$$\frac{BA'}{A'C} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{CB'}} \quad \text{e} \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{BP}}.$$

Logo,

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{CB'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AB'}}{\overline{BP}} = -1.$$

Reciprocamente, sejam A', B' e C' pontos situados sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC e tais que a relação (4.2) seja válida. Marque o ponto de interseção B'' das retas $\overleftrightarrow{A'C'}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Como A', B'' e C' são colineares, a primeira parte acima garante que

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1.$$

Comparando essa relação com (4.2), concluímos que $\frac{CB'}{B'A} = \frac{CB''}{B''A}$; a partir daí, e com o auxílio do problema 2, página 157, é fácil concluir que $B' = B''$. Logo, A', B' e C' são colineares. ■

A título de ilustração do uso do teorema de Menelaus, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.22. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se D é o pé da bissetriz externa relativa a A e E e F são os pés das bissetrizes internas relativas a B e C, prove que os pontos D, E e F são colineares.

Prova. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} < \overline{AC}$, de sorte que o vértice B está situado no interior do segmento CD (cf.figura 4.27).

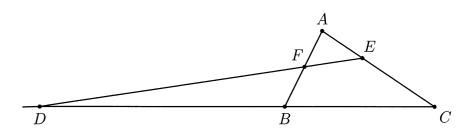



Figura 4.27: colinearidade dos pés de certas bissetrizes.

Pelo teorema de Menelaus, basta mostrarmos que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1.$$

Mas, pelo teorema da Bissetriz, temos

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}, \quad \frac{BD}{DC} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \quad \text{e} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}},$$

de sorte que, multiplicando ordenadamente as três expressões acima, obtemos a igualdade desejada. ■

Como aplicação adicional do teorema de Menelaus provamos, a seguir, um famoso teorema de Girard Desargues, matemático francês do século XVII, considerado o fundador da Geometria Projetiva.

Teorema 4.23 (Desargues)**.** Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos tais que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X\}$ e $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Y\}$, então X,

Y e Z são colineares se, e só se, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas[6].

Prova. Suponha, inicialmente, que X, Y e Z são colineares (cf. figura 4.28). A fim de mostrarmos que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas, é suficiente supor que $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ concorrem em um ponto O, mostrando, em seguida, que $O \in \overleftrightarrow{CC'}$, i.e., que O, C e C' são colineares. Para tanto, aplicaremos o teorema de Menelaus ao triângulo $AA'Y$, mostrando que

$$\frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AC}{CY} = -1. \tag{4.3}$$

Para o que falta, aplicando o teorema de Menelaus aos triângulos ZAA', YZA e YZA', obtemos

$$\frac{ZB'}{B'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AB}{BZ} = -1, \quad \frac{YZ}{XZ} \cdot \frac{ZB}{BA} \cdot \frac{AC}{CY} = -1$$

e

$$\frac{YC'}{C'A'} \cdot \frac{A'B'}{B'Z} \cdot \frac{ZX}{XY} = -1.$$

Multiplicando membro a membro as três relações acima e levando em conta que

$$\frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZX}{XY} = \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZB}{BA} = \frac{ZB'}{B'A'} \cdot \frac{A'B'}{B'Z} = 1,$$

[6]No jargão das artes visuais, se os pontos X, Y e Z forem colineares, diz-se que os triângulos ABC e $A'B'C'$ estão **em perspectiva a partir de uma reta** (a reta dos pontos X, Y e Z), a qual é, então, denominada o **horizonte**; por outro lado, se as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ forem concorrentes ou paralelas, diz-se que ABC e $A'B'C'$ estão **em perspectiva a partir de um ponto**, qual seja: o ponto de concurso das retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ (então denominado o **ponto de fuga**), caso estas sejam concorrentes, ou o **ponto do infinito** na direção de $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$, caso estas sejam paralelas. Assim, em palavras o teorema de Desargues afirma que, no plano, *dois triângulos estão em perspectiva a partir de uma reta se, e só se, estiverem em perspectiva a partir de um ponto.*

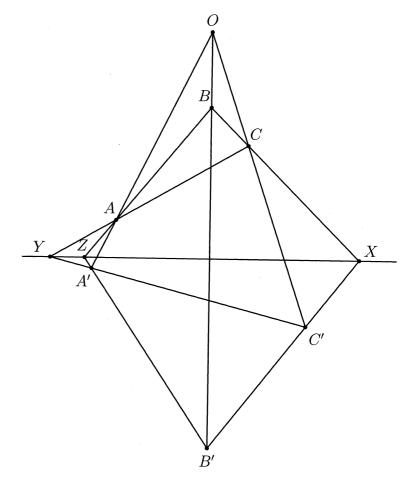



Figura 4.28: o teorema de Desargues.

obtemos (4.3).

A demonstração da afirmação recíproca é análoga e será deixada como exercício para o leitor (cf. problema 1, página 198). ■

À sequência, apresentamos o análogo do teorema de Menelaus para a concorrência das retas que unem cada vértice de um triângulo a um ponto situado sobre a reta suporte do lado oposto. Tal resultado é

devido ao matemático italiano dos séculos XVII e XVIII Giovanni Ceva, sendo conhecido como o **teorema de Ceva**.

Teorema 4.24 (Ceva). Dados um triângulo ABC e pontos A', B' e C' situados respectivamente sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, temos que

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1 \tag{4.4}$$

se, e só se, as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ forem concorrentes ou paralelas.

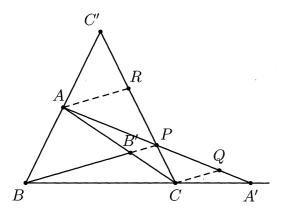



Figura 4.29: o teorema de Ceva.

Prova. Suponha, inicialmente (cf. figura 4.29), que os pontos $A' \in \overrightarrow{BC}\setminus BC$, $B' \in AC$ e $C' \in \overrightarrow{BA}\setminus AB$ são tais que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ concorrem em um ponto P (os demais casos são totalmente análogos). Marque os pontos $Q \in \overleftrightarrow{AA'}$ e $R \in \overleftrightarrow{CC'}$ tais que $\overleftrightarrow{CQ}, \overleftrightarrow{AR} \parallel \overleftrightarrow{BP}$. Então, $BPA' \sim CQA'$, $ARC' \sim BPC'$ e $CB'P \sim CAR$, de sorte que

$$\frac{BA'}{A'C}=-\frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}},\ \frac{AC'}{C'B}=-\frac{\overline{AR}}{\overline{BP}}$$

e

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{\overline{CA}-\overline{B'A}}{\overline{B'A}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{B'A}}-1=\frac{\overline{CQ}}{\overline{B'P}}-1.$$

Portanto,

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}}\left(\frac{\overline{CQ}}{\overline{B'P}}-1\right)\frac{\overline{AR}}{\overline{BP}}=\overline{AR}\left(\frac{1}{\overline{B'P}}-\frac{1}{\overline{CQ}}\right),$$

e basta mostrarmos que a última expressão acima é igual a 1, i.e., que

$$\frac{1}{\overline{B'P}}=\frac{1}{\overline{AR}}+\frac{1}{\overline{CQ}}.$$

Mas isso é exatamente o que diz o problema 11 da página 170.

Por fim, deixamos como exercício para o leitor (cf. problema 2, página 198) a tarefa de mostrar que, se $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ forem paralelas, então (4.4) também é válida.

Reciprocamente, suponha válida a relação (4.4) e marque $B'' \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB''}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ sejam concorrentes ou paralelas. Segue da primeira parte acima que

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1,$$

relação que, coligida com (4.4), fornece $\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB''}{B''A}$. A partir daí, e invocando novamente o auxílio do problema 2, página 157, concluímos imediatamente que $B'=B''$. Logo, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas. ■

Para uma outra prova do teorema de Ceva no caso em que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes, veja o problema 17, página 229. Por ora, mostremos que ele nos permite dar uma prova alternativa da concorrência das medianas, bissetrizes internas e alturas de um triângulo.

Exemplo 4.25. Seja ABC um triângulo qualquer. Utilize o teorema de Ceva para provar que as medianas, as bissetrizes internas e as retas suportes das alturas de ABC são concorrentes.

Prova. Se M_a, M_b e M_c são, respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC e AB de ABC, é imediato que $\frac{BM_a}{M_aC} = \frac{CM_b}{M_bA} = \frac{AM_c}{M_cB} = 1$, de modo que

$$\frac{BM_a}{M_aC} \cdot \frac{CM_b}{M_bA} \cdot \frac{AM_c}{M_cB} = 1.$$

Portanto, pelo teorema de Ceva, AM_a, BM_b e CM_c concorrem em um único ponto.

Para o restante da prova, sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.

Sejam P_a, P_b e P_c, respectivamente, os pés das bissetrizes internas relativas a BC, AC e AB. O teorema da Bissetriz (cf. proposição 4.5) garante que $\frac{AP_c}{P_cB} = \frac{b}{a}$, $\frac{BP_a}{P_aC} = \frac{c}{b}$ e $\frac{CP_b}{P_bA} = \frac{a}{c}$, de forma que

$$\frac{AP_c}{P_cB} \cdot \frac{BP_a}{P_aC} \cdot \frac{CP_b}{P_bA} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

Assim, novamente pelo teorema de Ceva, AP_a, BP_b e CP_c concorrem em um único ponto.

Por fim, para a concorrência das alturas de ABC, consideremos somente o caso em que ABC é acutângulo, deixando os demais casos como exercício para o leitor (cf. problema 3, página 198). Sejam, pois, H_a, H_b e H_c, respectivamente, os pés das alturas relativas a A, B e C. O problema 2, página 144, garante que $AH_bH_c \sim ABC$, de sorte que $\frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_bA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$; analogamente, $\frac{\overline{BH_a}}{\overline{H_cB}} = \frac{c}{a}$ e $\frac{\overline{CH_b}}{\overline{H_aC}} = \frac{a}{b}$ e, daí,

$$\frac{AH_c}{H_cB} \cdot \frac{BH_a}{H_aC} \cdot \frac{CH_b}{H_bA} = \frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_bA}} \cdot \frac{\overline{BH_a}}{\overline{H_cB}} \cdot \frac{\overline{CH_b}}{\overline{H_aC}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

■

A seguir, apresentamos uma bela aplicação do teorema de Ceva. Para o enunciado da mesma, convencionamos chamar de **ceviana** de

um triângulo a qualquer segmento (ou à reta ou semirreta correspondente) que une um vértice do triângulo a um ponto sobre a reta suporte do lado oposto a tal vértice; por exemplo, medianas, bissetrizes (internas ou externas) e alturas de um triângulo são todas exemplos de cevianas do referido triângulo.

Duas cevianas AP e AP' de um triângulo ABC (cf. figura 4.30) são ditas **isogonais** (em relação a A) se as retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{AP'}$ forem simétricas em relação à reta suporte da bissetriz interna AQ relativa a A, i.e., se, e só se, $P\widehat{A}Q = P'\widehat{A}Q$.

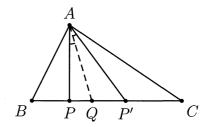



Figura 4.30: cevianas isogonais.

É imediato que, para toda ceviana AP de um triângulo ABC, existe uma única ceviana AP' de ABC tal que AP e AP' são isogonais. Nesse caso, diremos também que AP' (resp. AP) é a ceviana **isogonal** a AP (resp. AP'). O lema a seguir estabelece uma caracterização útil da isogonalidade de duas cevianas.

Lema 4.26. Nas notações da figura 4.31, se D e E (resp. F e G) são os pés das perpendiculares baixadas de P (resp. Q) às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, então

$$\overrightarrow{AP} \text{ e } \overrightarrow{AQ} \text{ são isogonais } \Leftrightarrow \frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{QG}}{\overline{QF}}.$$

.

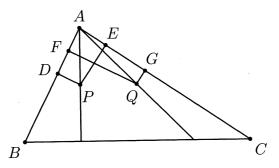



Figura 4.31: critério para isogonalidade.

Prova. Nas notações da figura 4.31, observe, inicialmente, que os quadriláteros $ADPE$ e $AFQG$ são inscritíveis (uma vez que cada um deles tem dois ângulos opostos iguais a 90°), de sorte que $D\widehat{P}E = G\widehat{Q}F = 180° - B\widehat{A}C$. Portanto, aplicando sucessivamente os casos LAL e AA de semelhança de triângulos, concluímos que

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{QG}}{\overline{QF}} \Leftrightarrow DPE \sim GQF \Leftrightarrow D\widehat{E}P = G\widehat{F}Q.$$

Mas, utilizando novamente o fato de os quadriláteros $ADPE$ e $AFQG$ serem inscritíveis, concluímos que a última igualdade acima se verifica se, e só se, $D\widehat{A}P = G\widehat{A}Q$; por sua vez, essa última igualdade equivale ao fato de $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AQ}$ serem isogonais em relação a A. ■

Podemos, finalmente, enunciar e provar a consequência desejada do teorema de Ceva, a qual estabelece a concorrência das cevianas isogonais a três cevianas concorrentes dadas.

Teorema 4.27. Sejam AA', BB' e CC' cevianas de um triângulo ABC, com isogonais AA'', BB'' e CC'', respectivamente. Então, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas se, e só se, $\overleftrightarrow{AA''}$, $\overleftrightarrow{BB''}$ e $\overleftrightarrow{CC''}$ são concorrentes ou paralelas.

Prova. Mostremos que, se $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes, então $\overleftrightarrow{AA''}$, $\overleftrightarrow{BB''}$ e $\overleftrightarrow{CC''}$ são concorrentes ou paralelas (para o caso restante, veja o problema 7, página 199. Para tanto, sejam P o ponto de concurso de $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$, e x, y e z, respectivamente, as distâncias de P às retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ (cf. figura 4.32).

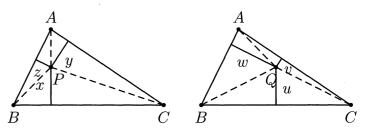



Figura 4.32: concorrência das cevianas isogonais.

É suficiente mostrar que, se $\overleftrightarrow{BB''}$ e $\overleftrightarrow{CC''}$ forem concorrentes em Q, então $\overleftrightarrow{AA''}$ também passará por Q. Para tanto, sejam u, v e w, respectivamente, as distâncias de Q às retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$. Como $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{BB''}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$, $\overleftrightarrow{CC''}$ são pares de cevianas isogonais, segue do lema anterior que

$$\frac{x}{y} = \frac{v}{u} \text{ e } \frac{z}{x} = \frac{u}{w}.$$

Portanto,

$$\frac{z}{y} = \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{u}{w} \cdot \frac{v}{u} = \frac{v}{w},$$

de sorte que, novamente pelo lema anterior, os pontos P e Q estão situados sobre cevianas isogonais em relação a A. Mas, como $P \in \overleftrightarrow{AA'}$, concluímos que $Q \in \overleftrightarrow{AA''}$. ■

Nas notações do enunciado do teorema anterior, se P (resp. Q) é o ponto de concurso das cevianas AA', BB' e CC' (resp. AA'', BB'' e CC''), dizemos que os pontos P e Q são **conjugados isogonais** ou,

ainda, que P (resp. Q) é o ponto **conjugado isogonal** de Q (resp. P) em relação a ABC. Para um exemplo relevante de pontos conjugados isogonais, veja o problema 8, página 200; outro exemplo interessante será discutido no final da seção 5.2.

Problemas – Seção 4.4

1. * Complete a demonstração do teorema de Desargues. Mais precisamente, mostre que, se ABC e $A'B'C'$ são triângulos tais que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{Z\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{X\}$ e $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Y\}$, e se as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes ou paralelas, então os pontos X, Y e Z são colineares.

2. * Complete a prova do teorema de Ceva, mostrando que se A', B' e C' são pontos situados respectivamente sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB de ABC, tais que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas, então
$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

3. * Complete a análise da última parte do exemplo 4.25, mostrando que, se ABC é um triângulo retângulo ou obtusângulo, então as retas suportes das alturas de ABC concorrem em um único ponto.

4. * Dizemos que os pontos P e Q, situados sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e distintos de B e de C, são **conjugados harmônicos** em relação a B e C se
$$\frac{BP}{PC} = -\frac{BQ}{QC}.$$
A esse respeito, faça os seguintes itens:

   (a) Se P e Q são conjugados harmônicos em relação a B e C, então exatamente um dos pontos P e Q está sobre o segmento BC.

   (b) Para todo ponto $P \in \overleftrightarrow{BC}$, com $P \neq B, C$, existe um único ponto $Q \in \overleftrightarrow{BC}$, tal que $Q \neq B, C$ e P e Q são conjugados harmônicos em relação a B e C. (Graças a esse item, dizemos que Q (resp. P) é o ponto **conjugado harmônico** de P (resp. de Q) em relação a B e C.)

   (c) Em um triângulo ABC, se P é o pé da bissetriz interna e Q o pé da bissetriz externa relativas a A, então P e Q são conjugados harmônicos em relação a B e C.

   (d) Dado um triângulo ABC, sejam P, Q e R pontos situados respectivamente sobre as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, todos diferentes dos vértices de ABC. Se P' é o conjugado harmônico de P em relação a B e C, prove que as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BQ}$ e $\overleftrightarrow{CR}$ são concorrentes se, e só se, os pontos P', Q e R são colineares.

5. Prove que, em todo triângulo, as cevianas que unem cada vértice ao ponto de tangência do círculo inscrito com o lado oposto são concorrentes. O ponto de concurso das mesmas é denominado o **Ponto de Gergonne**[7] do triângulo ABC.

6. Prove que, em todo triângulo, as cevianas que unem cada vértice ao ponto de tangência do círculo ex-inscrito ao lado oposto com tal lado são concorrentes. O ponto de concurso das mesmas é denominado o **Ponto de Nagel**[8] do triângulo ABC.

7. * Complete a prova do teorema 4.27. Mais precisamente, mostre que, se AA', BB' e CC' são cevianas paralelas de um triângulo

[7]Após o matemático francês do século XIX Joseph Gergonne.
[8]Após o matemático alemão do século XIX Christian Heinrich von Nagel.

ABC, com isogonais AA'', BB'' e CC'', respectivamente, então $\overleftrightarrow{AA''}$, $\overleftrightarrow{BB''}$ e $\overleftrightarrow{CC''}$ são concorrentes ou paralelas.

8. * Se H e O denotam, respectivamente, o ortocentro e o circuncentro de um triângulo não equilátero ABC, prove que H e O são pontos conjugados isogonais.

9. * Generalize o problema anterior, mostrando o seguinte resultado: dados um triângulo ABC e um ponto P em seu interior, se Q e R são os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados AB e AC, então a ceviana conjugada isogonal à semirreta $\overrightarrow{AP}$ é a semirreta que parte de A e é perpendicular à reta QR.

10. Sejam ABC um triângulo e A' e A'', B' e B'', C' e C'' pares de pontos situados, respectivamente, sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, tais que os pontos médios dos segmentos $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ coincidem com os pontos médios dos lados do triângulo ABC. Se AA', BB' e CC' forem concorrentes (resp. A', B' e C' forem colineares), prove que AA'', BB'' e CC'' também são concorrentes (resp. A'', B'' e C'' são colineares).

11. Prove o **teorema de Pappus**[9]: são dados dois ternos de pontos colineares A, B, C e A', B', C'. Se $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} = \{F\}$, $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C} = \{E\}$ e $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C} = \{D\}$, então os pontos D, E e F são colineares.

12. (Estados Unidos.) Seja ABC um triângulo escaleno e r, s e t as tangentes ao círculo circunscrito a ABC respectivamente em A, B e C. Se P, Q e R denotam os pontos de interseção de r, s e t respectivamente com as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, prove que P, Q e R são colineares.

[9]Após Pappus de Alexandria, matemático grego do século IV.

13. Em um triângulo escaleno ABC, traçamos a altura AH_a e, em seguida, baixamos as perpendiculares H_aD e H_aE respectivamente às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ ($D \in \overleftrightarrow{AB}$ e $E \in \overleftrightarrow{AC}$); em seguida, marcamos o ponto P de interseção das retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. A partir das alturas relativas aos vértices B e C de ABC, construímos, de maneira análoga, os pontos $Q \in \overleftrightarrow{AC}$ e $R \in \overleftrightarrow{AB}$. Mostre que os pontos P, Q e R são colineares.

4.5 O teorema das cordas e potência de ponto

As duas proposições a seguir encerram outra importante consequência elementar dos casos de semelhança de triângulos estudados na seção 4.2, sendo conhecidas conjuntamente, na literatura, como o **teorema das cordas**.

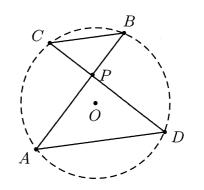



Figura 4.33: o teorema das cordas.

Proposição 4.28. Se A, B, C, D e P são pontos distintos do plano,

tais que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{P\}$, então

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \;\Leftrightarrow\; \text{o quadrilátero de vértices } A, B, C \text{ e } D \text{ é inscritível.}$$

Prova. Suponha, inicialmente, que o quadrilátero de vértices A, B, C e D é inscritível, com círculo circunscrito Γ. Em princípio, temos de considerar separadamente os casos em que P está no interior ou no exterior do círculo delimitado por Γ; entretanto, uma vez que a análise do segundo caso é totalmente análoga à do primeiro, consideraremos somente este (cf. figura 4.33).

Trace os segmentos AD e BC. Pelo teorema do ângulo inscrito, temos $A\widehat{B}C = A\widehat{D}C$ ou, ainda, $P\widehat{B}C = A\widehat{D}P$. Como $B\widehat{P}C = A\widehat{P}D$ (pois são ângulos OPV), segue do caso de semelhança AA que $PBC \sim PDA$. Daí, temos $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$ e, portanto, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Reciprocamente, se $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, então $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$. Mas, como $B\widehat{P}C = A\widehat{P}D$, segue do caso de semelhança LAL que $PBC \sim PDA$ e, daí, $P\widehat{B}C = A\widehat{D}P$. Mas isso é o mesmo que $A\widehat{B}C = A\widehat{D}C$, e a proposição 3.39 garante que $ABCD$ é inscritível. ■

O resultado a seguir pode ser visto como um caso limite do anterior, de maneira que deixaremos sua demonstração como exercício para o leitor (cf. problema 1, página 215).

Proposição 4.29. Se A, B, C e P são pontos distintos no plano, com $B \in AP$ e $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, então $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$ se, e só se, o círculo que passa pelos pontos A, B e C for tangente à reta $\overleftrightarrow{PC}$ em C (cf. figura 4.34).

Para uso futuro, colecionamos a seguinte consequência importante do teorema das cordas.

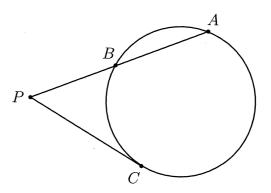
Corolário 4.30. São dados no plano um círculo $\Gamma(O; R)$ e um ponto $P \notin \Gamma$. Se uma reta que passa por P intersecta Γ nos pontos A e B (com $A = B$, caso P seja exterior ao círculo delimitado por Γ e a reta seja tangente a Γ em A), então

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = |R^2 - \overline{OP}^2|. \tag{4.5}$$

Figura 4.34: caso limite do teorema das cordas.

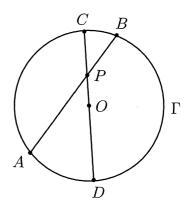



Figura 4.35: calculando $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ em função de $\overline{PO}$ e R.

Prova. Consideremos somente o caso em que P é interior ao disco delimitado por Γ (cf. figura 4.35), sendo o caso em que P é exterior a

tal disco totalmente análogo. Trace por P o diâmetro CD de Γ, com $P \in OC$. Então, $\overline{PC} = R - \overline{OP}$ e $\overline{PD} = R + \overline{OP}$, de sorte que o teorema das cordas fornece

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = (R - \overline{OP})(R + \overline{OP}) = R^2 - \overline{OP}^2.$$

■

De posse do resultado acima, podemos apresentar mais um belo resultado de L. Euler, colecionado no seguinte

Teorema 4.31 (Euler). Um círculo γ, de raio r e centro I, é interior a um círculo Γ de raio R e centro O. Se $A \in \Gamma$ e AB e AC são as cordas de Γ tangentes a γ, então γ é o círculo inscrito no triângulo ABC se, e só se,

$$\overline{OI}^2 = R(R - 2r).$$

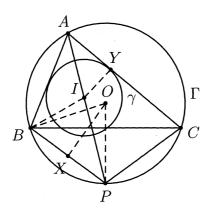



Figura 4.36: cálculo da distância $\overline{OI}$.

Prova. Se P é o ponto de interseção do prolongamento da bissetriz AI de $\angle BAC$ com Γ (cf. figura 4.36), segue do corolário anterior que

$$\overline{AI} \cdot \overline{IP} = R^2 - \overline{OI}^2. \quad (4.6)$$

Agora, sendo X e Y respectivamente os pés das perpendiculares traçadas de O e I a BP e AC, segue do fato de BOP ser isósceles e do teorema do ângulo inscrito que

$$B\widehat{O}X = \frac{1}{2}B\widehat{O}P = B\widehat{A}P = P\widehat{A}C = I\widehat{A}Y.$$

Como ambos os triângulos BOX e IAY têm um ângulo de $90°$, segue do caso AA que $BOX \sim IAY$. Portanto, $\frac{\overline{BX}}{\overline{IY}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{AI}}$ ou, ainda,

$$\overline{BX} \cdot \overline{AI} = \overline{BO} \cdot \overline{IY}. \quad (4.7)$$

Mas, como $\overline{BO} = R$, $\overline{IY} = r$ e $\overline{BX} = \frac{1}{2}\overline{BP}$, segue de (4.6) e (4.7) que

$$R^2 - \overline{OI}^2 = \overline{AI} \cdot \overline{IP} = 2Rr \cdot \frac{\overline{IP}}{\overline{BP}},$$

de maneira que

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr \Leftrightarrow \overline{BP} = \overline{IP}.$$

Por fim, a proposição 3.38 garante que a última igualdade acima ocorre se, e só se, I for o incentro do triângulo ABC. ■

A seguir, listamos dois corolários importantes do resultado acima, o primeiro dos quais é imediato.

Corolário 4.32. Se r e R denotam, respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito a um triângulo ABC, então $R \geq 2r$, ocorrendo a igualdade se, e só se, ABC for equilátero.

Nosso segundo corolário é o caso particular de um famoso teorema de J. V. Poncelet[10] sobre cônicas.

Corolário 4.33 (Poncelet). Sejam γ e Γ, respectivamente, os círculos inscrito e circunscrito a um triângulo ABC. Se $A' \neq A, B, C$ é outro ponto de Γ, e $A'B'$ e $A'C'$ são as cordas de Γ tangentes a γ, então γ é o círculo inscrito no triângulo $A'B'C'$ (cf. figura 4.37).

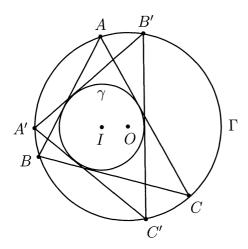



Figura 4.37: o teorema de Poncelet.

Prova. Se $\gamma(I; r)$ e $\Gamma(O; R)$, então o fato de γ ser o círculo inscrito em ABC garante, pelo teorema de Euler 4.31, que $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$. De posse dessa igualdade, aplicando novamente o referido teorema ao triângulo $A'B'C'$, concluímos que $B'C'$ tangencia γ, conforme desejado. ■

Voltando ao desenvolvimento geral da teoria, motivados pelo corolário 4.30, definimos a **potência** do ponto P em relação ao círculo $\Gamma(O; R)$ como sendo o número real

$$\text{Pot}_\Gamma(P) = \overline{OP}^2 - R^2. \tag{4.8}$$

Assim, $\text{Pot}_\Gamma(P) = 0$ se, e só se, $P \in \Gamma$, $\text{Pot}_\Gamma(P) > 0$ se, e só se, P for exterior ao disco delimitado por Γ e $\text{Pot}_\Gamma(P) < 0$ se, e só se, P for interior a tal disco. Observe também que $\text{Pot}_\Gamma(P) \geq -R^2$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $P = O$.

Precisamos, agora, do seguinte resultado, cuja prova será parcialmente postergada para a seção 6.2 (cf. proposição 6.8).

[10]Após Jean Victor Poncelet, matemático francês do século XIX.

Teorema 4.34. Se Γ_1 e Γ_2 são círculos não concêntricos, então o LG dos pontos P do plano tais que $\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P)$ é uma reta perpendicular à reta que une os centros de Γ_1 e Γ_2 (a reta e, na figura 4.38).

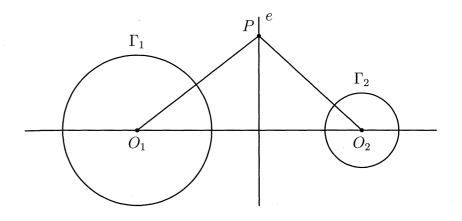



Figura 4.38: o eixo radical de dois círculos.

Prova. Se $\Gamma_1(O_1; R_1)$ e $\Gamma_2(O_2; R_2)$, então

$$\begin{aligned} \text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P) &\Leftrightarrow \overline{PO_1}^2 - R_1^2 = \overline{PO_2}^2 - R_2^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{PO_1}^2 - \overline{PO_2}^2 = R_1^2 - R_2^2, \end{aligned} \tag{4.9}$$

i.e., se, e só se, a diferença dos quadrados das distâncias de P aos pontos O_1 e O_2, respectivamente, for constante e igual a $R_1^2 - R_2^2$. Para concluir, basta aplicar o resultado da proposição 6.8. ■

Nas notações do enunciado do teorema anterior, o LG descrito no mesmo é denominado o **eixo radical**[11] de Γ_1 e Γ_2. O exemplo a seguir

[11]Cabe, aqui, uma palavra quanto à terminologia. Apesar de a nomenclatura

explica como construí-lo, com régua e compasso, quando os círculos em questão têm pontos em comum.

Exemplo 4.35. Se P for um ponto exterior ao disco delimitado por um círculo $\Gamma(O;R)$ e T for o ponto de tangência de uma das retas tangentes a Γ e passando por P, segue do corolário 4.30 que

$$\text{Pot}_{\Gamma}(P) = \overline{PO}^2 - R^2 = \overline{PT}^2. \tag{4.10}$$

Há três casos a considerar:

(a) Γ_1 e Γ_2 são círculos tangentes exteriormente: o eixo radical de Γ_1 e Γ_2 é a tangente comum e, mostrada na figura 4.39. De fato, uma vez que para todo ponto $P \in e$, que não o ponto de tangência T com os círculos, segue de (4.10) que

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \overline{PT}^2 = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P).$$

(b) Γ_1 e Γ_2 são círculos tangentes interiormente: o eixo radical de Γ_1 e Γ_2 é a tangente comum e, mostrada na figura 4.40. Realmente, para todo ponto $P \in e$ que não o ponto de tangência T com os círculos, ainda segue de (4.10) que

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \overline{PT}^2 = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P).$$

(c) Γ_1 e Γ_2 são dois círculos secantes, se intersectando nos pontos A e B: o eixo radical de Γ_1 e Γ_2 é a reta $e = \overleftrightarrow{AB}$ da figura 4.41., uma vez que para todo ponto $P \in e \setminus AB$, temos

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P).$$

---

eixo radical estar consagrada pelo uso, ela provém de uma tradução equivocada do Inglês *radical axis*. De fato, como (nas notações da prova do teorema 4.34) $P \in e$ se, e só se, $\sqrt{\overline{PO_1}^2 + R_2^2} = \sqrt{\overline{PO_2}^2 + R_1^2}$, seria mais natural chamarmos e de *eixo dos radicais* ou *eixo das raízes*. Por sua vez, tal nomenclatura alternativa estaria em maior consonância com o significado matemático da expressão inglesa *radical axis*. Para outra motivação geométrica para as nomenclaturas alternativas aludidas acima, sugerimos ao leitor o problema 8, página 270.

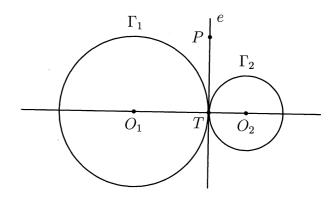



Figura 4.39: eixo radical e de dois círculos tangentes exteriormente.

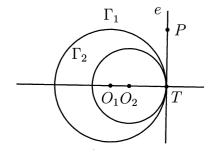



Figura 4.40: eixo radical e de dois círculos tangentes interiormente.

Para mostrar como construir, com régua e compasso, o eixo radical de dois círculos não concêntricos exteriores ou interiores, precisamos, primeiramente, da seguinte consequência do teorema 4.34.

Corolário 4.36. Se Γ_1, Γ_2 e Γ_3 são três círculos com centros não colineares, então existe um único ponto P no plano tal que

$$\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_3}(P).$$

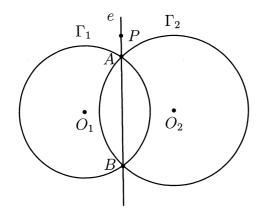



Figura 4.41: eixo radical e de dois círculos secantes.

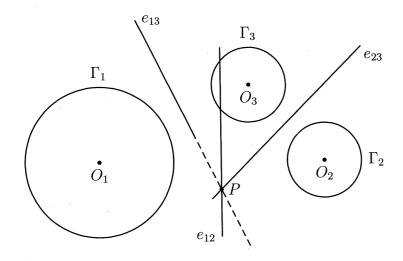



Figura 4.42: o centro radical de três círculos de centros não colineares.

Prova. Para $1 \leq i < j \leq 3$, seja e_{ij} o eixo radical de Γ_i e Γ_j (cf. figura 4.42). Se P é o ponto de interseção de e_{12} e e_{23}, segue de $P \in e_{12}$ que $\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_2}(P)$ e de $P \in e_{23}$ que $\text{Pot}_{\Gamma_2}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_3}(P)$. Portanto, por transitividade temos $\text{Pot}_{\Gamma_1}(P) = \text{Pot}_{\Gamma_3}(P)$, de sorte que $P \in e_{13}$. ■

Nas notações do corolário acima, o ponto cuja existência é garantida por ele é denominado o **centro radical** dos círculos Γ_1, Γ_2 e Γ_3. Conforme antecipamos anteriormente, a noção de centro radical nos permite construir o eixo radical de dois círculos exteriores, conforme descrito no próximo exemplo.

Exemplo 4.37. *Construa, com régua e compasso, o eixo radical dois dois círculos* Γ_1 *e* Γ_2 *da figura 4.43.*

Solução. Trace um círculo auxiliar Γ_3 de centro O_3, secante a ambos Γ_1 e Γ_2 e tal que $O_3 \notin \overleftrightarrow{O_1O_2}$. Em seguida, para $i = 1, 2$ trace o eixo radical e_{i3} de Γ_i e Γ_3, obtendo o centro radical P de Γ_1, Γ_2 e Γ_3 como a interseção das retas e_{13} e e_{23}. Por fim, o eixo radical desejado é a reta que passa por P e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$. ■

Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que a construção, com régua e compasso, do eixo radical de dois círculos interiores e não concêntricos pode ser levada a cabo de maneira totalmente análoga à construção descrita no exemplo acima. Para uma outra construção do eixo radical de dois círculos exteriores, veja o problema 9, página 216.

Como segunda aplicação da noção de centro radical, discutimos, nos exemplos a seguir, duas construções geométricas clássicas, devidas a C. Ptolomeu, envolvendo a tangência de círculos. Observamos, ainda, que os problemas subjacentes a tais construções são coletivamente conhecidos como o **problema de tangência de Ptolomeu**.

A solução do primeiro exemplo se resume, em última análise, a uma pequena modificação do argumento apresentado na solução do exemplo anterior.

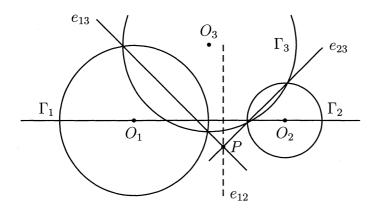



Figura 4.43: construindo o eixo radical de dois círculos exteriores.

Exemplo 4.38. São dados, no plano, um círculo Γ e dois pontos A e B exteriores ao disco delimitado por Γ. Construa, com régua e compasso, todas os círculos α, tangentes a Γ e passando por A e B.

Solução. Nas notações da figura 4.44, trace um círculo auxiliar β, passando por A e B e secante a Γ. Em seguida, trace o eixo radical e de Γ e β, e marque o ponto de interseção P das retas e e $\overleftrightarrow{AB}$. É imediato que P é o centro radical dos círculos α, β e Γ, de sorte que P está sobre o eixo radical t de Γ e α. Mas, como Γ e α devem ser tangentes, sabemos que t é uma tangente comum a ambos; portanto, invocando a construção delineada na proposição 3.26, podemos construir t como sendo uma das retas tangentes a Γ e passando por P (em geral, há duas possíveis retas t, uma das quais é mostrada na figura 4.44). Por fim, sendo T o ponto de tangência entre t e Γ, só nos resta construir α como sendo igual ao círculo que passa por A, B e T. ■

A seguir, examinamos o o problema da construção dos círculos tangentes a dois outros círculos dados e passando por um ponto também dado.

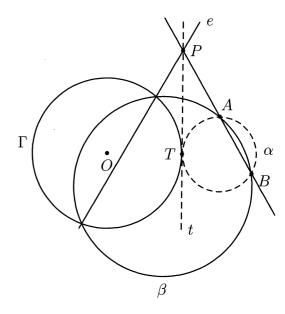



Figura 4.44: círculo tangente a Γ e passando por A e B.

Exemplo 4.39. São dados dois círculos exteriores Γ_1 e Γ_2 e um ponto A, exterior a ambos Γ_1 e Γ_2. Construa com régua e compasso todos os círculos Γ, passando por A e simultaneamente tangentes a Γ_1 e Γ_2.

Solução. Supondo o problema resolvido, sejam P e Q os pontos de tangência de Γ com Γ_1 e Γ_2, respectivamente (cf. figura 4.45. Sejam, ainda, C a interseção das retas $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$, e B a interseção de Γ com a reta $\overleftrightarrow{AC}$. Sendo O o centro de Γ, temos

$$O_2\widehat{R}Q = O_2\widehat{Q}R = O\widehat{Q}P = O\widehat{P}Q,$$

de maneira que $\overleftrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{O_2R}$. Em particular, é imediato verificar, a partir daí, que C coincide com o ponto de concurso das tangentes externas a Γ_1 e Γ_2 com a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ e, portanto, que $\overleftrightarrow{RU} \parallel \overleftrightarrow{PS}$.

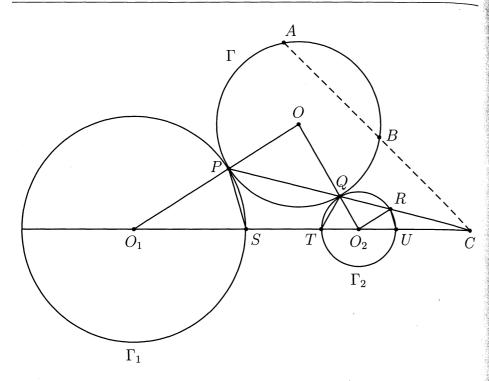



Figura 4.45: círculo tangente a Γ_1 e Γ_2 e passando por A.

Agora, afirmamos que o quadrilátero $PSTQ$ é inscritível. De fato, o paralelismo entre as retas $\overleftrightarrow{RU}$ e $\overleftrightarrow{PS}$, juntamente com a inscritibilidade do quadrilátero $TQRU$, fornecem

$$S\widehat{P}Q = U\widehat{R}C = 180° - P\widehat{R}U = 180° - Q\widehat{R}U = Q\widehat{T}U = 180° - Q\widehat{T}S,$$

de sorte que $S\widehat{P}Q + Q\widehat{T}S = 180°$.

Agora, aplicando o teorema das cordas aos quadriláteros inscritíveis $PSTQ$ e $PQBA$, obtemos sucessivamente

$$\overline{CS} \cdot \overline{CT} = \overline{CP} \cdot \overline{CQ} \quad \text{e} \quad \overline{CP} \cdot \overline{CQ} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$$

e, a partir dái,

$$\overline{CS} \cdot \overline{CT} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}.$$

Portanto, mais uma aplicação do teorema das cordas garante que o quadrilátero $STBA$ também é inscritível.

De posse da análise acima, e uma vez que as posições dos pontos A, S e T são conhecidas e o ponto C pode ser facilmente construído (cf. problema 22, página 123), podemos construir B como sendo igual ao ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{AC}$ com o círculo circunscrito ao triângulo STA. Por outro lado, uma vez obtido o ponto B, o problema em questão se reduz àquele discutido no exemplo 4.38.

Nesse ponto, o leitor atento deve ter observado que sua intuição sugeriria a existência de quatro círculos distintos, passando pelo ponto A e tangentes a Γ_1 e Γ_2, mas a solução acima só encontrou dois deles (de fato, após construirmos o ponto B, a solução do exemplo 4.38 fornece dois possíveis círculos Γ, tais que Γ_1 e Γ_2 são interiores a um deles e exteriores ao outro). Os outros dois círculos-solução Γ surgem ao considerarmos a possibilidade de que um dentre Γ_1 e Γ_2 seja interior a Γ e o outro seja exterior; nesse caso, uma pequena modificação do argumento apresentado acima resolve o problema da mesma forma, i.e., reduzindo-o ao problema da construção de um círculo que passa por dois pontos e tangencia um círculo dado. Para mais detalhes, veja o problema 16, página 218.

■

Problemas – Seção 4.5

1. * Prove a proposição 4.29.

2. AB é uma corda de um círculo Γ de centro O, medindo 8cm. Marcamos sobre AB um ponto C, situado a 3cm de B. O raio de Γ passando por O e C intersecta Γ em D, com $\overline{CD} = 1$cm. Calcule a medida do raio de Γ.

3. Em um triângulo ABC, $\overline{AB} = 8$cm. Sendo M o ponto médio de AB, calcule os possíveis valores de $\overline{BC}$ de modo que o círculo circunscrito ao triângulo AMC tangencie o lado BC.

4. Duas cordas AB e CD de um círculo são perpendiculares e se intersectam no ponto E, situado no interior do círculo e tal que $\overline{AE} = 2$, $\overline{EB} = 6$, $\overline{DE} = 3$. Calcule o diâmetro do círculo.

5. Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC} = a$ e h_a o comprimento da altura relativa à base. Sendo R o raio do círculo circunscrito a ABC, mostre que

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

6. Use o teorema das cordas para dar outra prova do teorema de Pitágoras.

7. São dados uma reta r e pontos $A, B, P \in r$, com $P \notin AB$. Se um círculo variável Γ passa por A e B, construa, com régua e compasso, o LG dos pontos de contato das tangentes traçadas a Γ a partir de P.

8. São dados uma reta r e pontos A e B, num mesmo semiplano dos determinados por r. Construa, com régua e compasso, todos os círculos passando por A e B e tangentes à reta r.

9. Dados dois círculos exteriores Γ_1 e Γ_2, sejam r e s duas tangentes comuns aos mesmos, e A_1 e A_2 (resp. B_1 e B_2) os pontos de tangência de r (resp. de s) com Γ_1 e Γ_2, respectivamente. Se P e Q são os pontos médios dos segmentos A_1A_2 e B_1B_2, também respectivamente, mostre que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é o eixo radical de Γ_1 e Γ_2.

10. Em um círculo Γ são dadas cordas AB e CD, tais que CD passa pelo ponto médio M de AB. Seja Σ o círculo de diâmetro CD e $E \in \Sigma$ tal que $\overleftrightarrow{ME} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Prove que $A\widehat{E}B = 90°$.

11. (Estados Unidos.) Em um triângulo acutângulo ABC, a reta suporte da altura relativa a AC intersecta o círculo de diâmetro AC em M e N. A reta suporte da altura relativa a AB intersecta o círculo de diâmetro AB em P e Q. Prove que os pontos M, N, P e Q são concíclicos.

12. Sejam dados um real $k > 1$ e pontos distintos B e C. Seja, ainda, Γ o círculo de Apolônio relativo a (B, C), na razão k. Se O é o centro de Γ e $X, Y \in \Gamma$ são tais que B, X e Y são colineares, prove que o quadrilátero de vértices C, O, X e Y é inscritível.

13. Em um triângulo ABC, sejam D, E e F, respectivamente, os pés das bissetrizes internas baixadas desde A, B e C. Sabendo que $E\widehat{D}F = 90°$, encontre os possíveis valores do ângulo $\angle BAC$.

14. (BMO.) Uma reta que passa pelo incentro I do triângulo ABC intersecta seu círculo circunscrito em F e G e seu círculo inscrito em D e E, com $D \in EF$. Se r denota o raio do círculo inscrito, prove que $\overline{DF} \cdot \overline{EG} \geq r^2$ e explique quando ocorre a igualdade.

15. (Polônia.) As bissetrizes internas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ de um triângulo ABC intersectam os lados opostos nos pontos D, E e F, respectivamente, e o círculo circunscrito a ABC novamente nos pontos K, L e M, também respectivamente. Prove que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DK}} + \frac{\overline{BE}}{\overline{EL}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{FM}} \geq 9,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, ABC for equilátero.

16. * Complete a discussão do exemplo 4.39, construindo todos os círculos α tangentes a Γ_1 e Γ_2 e passando pelo ponto A, tais que exatamente um dentre Γ_1 e Γ_2 seja interior a α.

17. Imite a discussão do exemplo 4.39 e do problema anterior para construir todos os círculos que passam por A e tangenciam Γ_1 e Γ_2, no caso em que A e Γ_2 são ambos interiores a Γ_1.

Para o próximo problema, recorde (cf. discussão que antecede a proposição 3.41) que, dados um triângulo ABC e um ponto $P \neq A, B, C$, o *triângulo pedal* de P em relação a ABC é o triângulo (possivelmente degenerado) formado pelos pés das perpendiculares baixadas de P às retas suportes dos lados de ABC.

18. Sejam dados um triângulo ABC e dois pontos P e Q em seu interior. Se P e Q são conjugados isogonais, prove que os vértices dos triângulos pedais correspondentes formam um hexágono inscritível, tal que o centro de seu círculo circunscrito é o ponto médio do segmento PQ. Tal círculo é denominado o **círculo pedal** de $\{P, Q\}$ em relação a ABC[12].

19. (China.) Sejam $ABCD$ um paralelogramo e E e F pontos da diagonal BD, tais que existe um círculo α que passa por E e F e é tangente às retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Prove que existe um círculo que passa por E e F e é tangente às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

20. Sejam Γ_1 e Γ_2 dois círculos não concêntricos do plano. Prove que o LG dos pontos do plano que são centros de círculos que intersectam Γ_1 e Γ_2 segundo diâmetros dos mesmos é a reta simétrica ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 em relação ao ponto médio do segmento formado por seus centros.

[12]O leitor atento deve ter observado que, de acordo com o problema 8, página 200, se H e O são respectivamente o ortocentro e o circuncentro de um triângulo ABC, então o círculo pedal de $\{H, O\}$ em relação a ABC é exatamente o círculo dos nove pontos de Euler.

21. Sejam α o círculo circunscrito ao triângulo ABC e M o ponto médio do arco $\overset{\frown}{BC}$ de α que não contém o vértice A. Um círculo β, passando por A e M, intersecta o lado AC em E e o prolongamento do lado AB em F. Se $AM \cap BC = \{D\}$, prove que os pontos D, E e F são colineares se, e só se, os incentros dos triângulos ABC e AEF coincidirem.

CAPÍTULO 5

Áreas de figuras Planas

Intuitivamente, a *área* de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado. Referimos o leitor ao excelente livro de E. Moise [13] para uma prova de que é realmente possível associar a cada polígono do plano uma área tal que os postulados 1. a 4. a seguir sejam satisfeitos.

Nosso propósito neste capítulo é, primordialmente, *operacionalizar* o cálculo de áreas, obtendo, a partir daí, algumas aplicações interessantes. Entretanto, os problemas da definição e do cálculo efetivo de áreas serão retomados no volume 3, quando desenvolvermos os rudimentos do Cálculo Diferencial e Integral.

5.1 Áreas de polígonos

Para que um conceito qualquer de *área* para polígonos tenha utilidade, *postulamos* que as seguintes propriedades (intuitivamente dese-

jáveis) sejam válidas:

1. Polígonos congruentes[1] têm áreas iguais.

2. Se um polígono convexo é *particionado* em um número finito de outros polígonos convexos (i.e., se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

4. A área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2.

Valendo os postulados 1. a 4. acima, particione um quadrado de lado $n \in \mathbb{N}$ em n^2 quadrados de lados 1 cada. Denotando a área do quadrado maior por A_n, devemos ter A_n igual à soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1, de maneira que

$$A_n = n^2.$$

Considere, agora, um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e área $A_{\frac{m}{n}}$. Arranje n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$. Tal quadrado maior terá, como já sabemos, área m^2; por outro lado, como ele está particionado em n^2 quadrados, cada um dos quais de lado $\frac{m}{n}$, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, i.e.,

$$m^2 = n^2 \cdot A_{\frac{m}{n}}.$$

[1] Apesar de não termos definido formalmente a noção de congruência para polígonos, a ideia é a mesma que para triângulos: um deles pode ser deslocado no espaço, sem deformá-lo, até coincidir com o outro. Observe que dois quadrados quaisquer de mesmo lado são congruentes (justifique essa afirmação!).

Portanto,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

A discussão acima sugere que a área de um quadrado de lado l deve ser igual a l^2. Para confirmar tal suposição, argumentamos de maneira análoga à prova do teorema de Thales: para $k \in \mathbb{N}$, tomamos números racionais x_k e y_k tais que

$$x_k < l < y_k \;\text{ e }\; y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

Em seguida, construímos quadrados de lados x_k e y_k, o primeiro contido no quadrado dado e o segundo o contendo. Como já sabemos calcular áreas de quadrados de lado racional, o postulado 3. acima garante que a área A_l do quadrado de lado l deve satisfazer as desigualdades

$$x_k^2 < A_l < y_k^2.$$

Mas, como $x_k^2 < l^2 < y_k^2$, concluímos que ambos os números A_l e l^2 devem pertencer ao intervalo (x_k^2, y_k^2), de maneira que

$$\begin{aligned} |A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2 &= (y_k - x_k)(y_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right). \end{aligned}$$

Tendo de satisfazer a desigualdade acima para todo $k \in \mathbb{N}$, um argumento análogo ao do problema 1.5.1 do volume 1 garante que $|A_l - l^2| = 0$, i.e.,

$$A_l = l^2.$$

Resumimos a discussão acima na proposição a seguir.

Proposição 5.1. Um quadrado de lado l tem área l^2.

Figura 5.1: áreas de um quadrado e de um retângulo.

Um argumento análogo ao acima permite provar que um retângulo de lados a e b tem área igual a ab (cf. figura 5.1): começamos com um retângulo de lados $m, n \in \mathbb{N}$, particionando-o em mn quadrados de lado 1 para mostrar que sua área é mn. Em seguida, tomamos um retângulo de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, e, com n_1n_2 cópias do mesmo, montamos um retângulo de lados m_1 e m_2. Somando áreas iguais, concluímos que a área do retângulo dado originalmente é igual a

$$\frac{m_1m_2}{n_1n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}.$$

Por fim, tomamos um retângulo de lados a e b reais positivos, e, para $k \in \mathbb{N}$, racionais x_k, y_k, u_k, v_k tais que $x_k < a < y_k$, $u_k < b < v_k$ e $y_k - x_k, v_k - u_k < \frac{1}{k}$. Sendo A a área do retângulo de lados a e b, um argumento análogo ao feito para quadrados garante que A e ab pertencem ambos ao intervalo (u_kx_k, y_kv_k) e, daí, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |A - ab| &< v_ky_k - u_kx_k = (v_k - u_k)y_k + u_k(y_k - x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k + u_k) < \frac{1}{k}((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right). \end{aligned}$$

Também como antes, a validade da desigualdade acima para todo $k \in \mathbb{N}$ garante que $A = ab$, fato que resumimos no seguinte resultado.

Proposição 5.2. Um retângulo de lados a e b tem área ab.

Calculemos a área de um paralelogramo como corolário da discussão acima. Para tanto, fixado um lado do paralelogramo, o qual chamaremos de **base**, diremos que a distância entre ele e seu lado paralelo é a **altura** do paralelogramo (relativa à base fixada).

Proposição 5.3. A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah.

Prova. Sejam $ABCD$ um paralelogramo de diagonais AC e BD (cf. figura 5.2), e E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Ademais, suponha, sem perda de generalidade, que $E \in AB$. É imediato verificar que os triângulos ADE e

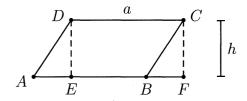



Figura 5.2: área de um paralelogramo.

BCF são congruentes pelo caso CH, de modo que $\overline{AE} = \overline{BF}$ e (pelo postulado 1.) $A(ADE) = A(BCF)$. Então, temos

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ADE) + A(BEDC) \\ &= A(BCF) + A(BEDC) \\ &= A(CDEF). \end{aligned}$$

Por outro lado, $CDEF$ é um retângulo de altura h e base

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a.$$

Portanto, segue da proposição 5.3 que $A(ABCD) = A(EFCD) = ah$. ■

De posse da fórmula para o cálculo da área de paralelogramos, podemos obter facilmente uma fórmula para a área de triângulos, mediante o artifício discutido na proposição a seguir.

Proposição 5.4. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e alturas h_a, h_b e h_c, respectivamente relativas aos lados a, b e c. Então,

$$A(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}. \quad (5.1)$$

Em particular, $ah_a = bh_b = ch_c$.

Prova. Seja $S = A(ABC)$ e D a interseção da paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ por A com a paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C (cf. figura 5.3). Então $ABC \equiv CDA$ por

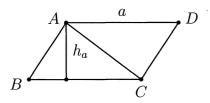



Figura 5.3: área de um triângulo.

ALA (uma vez que $B\widehat{A}C = D\widehat{C}A$, AC é lado comum e $B\widehat{C}A = D\widehat{A}C$), de sorte que $A(ABC) = A(CDA)$ pelo postulado 1.. Mas, como $ABCD$ é um paralelogramo de base a e altura h_a, segue da proposição anterior que

$$2S = A(ABC) + A(CDA) = A(ABCD) = ah_a.$$

Portanto, $A(ABC) = S = \frac{1}{2}ah_a$, e as outras duas igualdades podem ser obtidas de modo análogo. ■

De posse do material discutido até aqui, calcular áreas de polígonos convexos é, em princípio, uma tarefa fácil: uma vez que as diagonais

do mesmo, traçadas a partir de um de seus vértices, o particionam em triângulos, basta calcular a área de cada um desses triângulos com a ajuda da proposição anterior, somando os resultados obtidos.

Terminamos esta seção estabelecendo, para uso futuro, a seguinte convenção: se dois polígonos tiverem áreas iguais, diremos que são **equivalentes**. Por exemplo, de acordo com a proposição 5.3, um paralelogramo de base a e altura h é equivalente a um retângulo de lados a e h.

Problemas – Seção 5.1

1. $ABCD$ é um retângulo de lados $\overline{AB} = 32$m e $\overline{BC} = 20$m. Os pontos E e F são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB e AD. Calcule a área do quadrilátero $AECF$.

2. No paralelogramo $ABCD$, de diagonais AC e BD, marcamos o ponto E, sobre o lado AD, tal que $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Se $\overline{BE} = 5$cm, $\overline{BC} = 12$cm e $\overline{AE} = 4$cm, calcule a área do triângulo ECD.

3. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1, E o ponto médio de BC e F o de CD. Sendo G o ponto de interseção de DE e AF, Calcule a área do triângulo DFG.

4. * Se ABC é um triângulo equilátero com lados de comprimento a, prove que:

   (a) as alturas de ABC medem $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

   (b) $A(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

5. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1cm e E um ponto no interior de $ABCD$, tal que o triângulo ABE seja equilátero. Calcule a área do triângulo BCE.

6. $ABCD$ é um quadrado de lado 1cm e AEF um triângulo equilátero, com $E \in BC$ e $F \in CD$. Calcule a área de AEF.

7. Seja ABC um triângulo equilátero.

   (a) Mostre, mediante o cálculo de áreas, que as três alturas de ABC têm comprimentos iguais.

   (b) Prove que a soma das distâncias de um ponto escolhido no interior de ABC a seus lados independe da posição do ponto e é igual ao comprimento das alturas de ABC.

8. * Generalize o item (b) do problema anterior, mostrando que, se P é um ponto no interior de um polígono regular $A_1A_2\ldots A_n$, então a soma das distâncias de P às retas suportes dos lados de $A_1A_2\ldots A_n$ independe da posição de P.

9. O triângulo ABC tem lados a, b, c. As alturas correspondentes a tais lados são respectivamente iguais a h_a, h_b, h_c. Se $a + h_a = b + h_b = c + h_c$, prove que ABC é equilátero.

10. (OBM.) Seja ABC um triângulo retângulo de área 1m^2. Calcule a área do triângulo $A'B'C'$, onde A' é o simétrico de A em relação a $\overleftrightarrow{BC}$, B' é o simétrico de B em relação a $\overleftrightarrow{AC}$ e C' é o simétrico de C em relação a $\overleftrightarrow{AB}$.

11. Dado um triângulo qualquer ABC, prove que o triângulo formado pelos pontos médios dos lados de ABC tem área igual a $\frac{1}{4}$ da área de ABC.

12. Sejam $ABCD$ um quadrilátero qualquer e M, N, P e Q, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA. Prove que
$$A(MNPQ) = \frac{1}{2}A(ABCD).$$

13. São dados no plano dois quadrados de lado 1cm, tais que o centro de um deles coincide com um dos vértices do outro. Calcule os possíveis valores da área da porção do plano comum aos dois quadrados.

14. Sejam ABC um triângulo e $ABDE$ e $ACFG$ paralelogramos construídos exteriormente a ABC e com interiores disjuntos. Sejam, ainda, H o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ e $BCIJ$ um paralelogramo tal que $\overline{CI} = \overline{AH}$ e $\overleftrightarrow{CI} \parallel \overleftrightarrow{AH}$. Prove que
$$A(ABDE) + A(ACFG) = A(BCIJ).$$

15. Cada diagonal de um quadrilátero convexo o divide em dois triângulos de mesma área. Prove que o quadrilátero é um paralelogramo.

16. (OIM - adaptado.)

    (a) Se dois triângulos têm alturas iguais, prove que a razão entre suas áreas é igual à razão entre os comprimentos das bases correspondentes às alturas iguais.

    (b) Sejam ABC um triângulo e D, E e F pontos respectivamente sobre BC, CA e AB, tais que os segmentos AD, BE e CF são concorrentes em P. Sabe-se que $A(BDP) = 40$, $A(CDP) = 30$, $A(CEP) = 35$, $A(AFP) = 84$. Calcule a área de ABC.

17. Neste problema, damos uma prova parcial do teorema de Ceva 4.24, por meio de um argumento que utiliza a noção de área de um triângulo. Para tanto, sejam dados um triângulo ABC e pontos A', B' e C', situados respectivamente sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB e distintos dos vértices de ABC. Suponha, ademais, que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ concorram em um ponto P

(a) Use um argumento envolvendo áreas de triângulos para concluir que $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{A(ABP)}{A(ACP)}$.

(b) Conclua, a partir do item (a), que $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$.

18. (OIM.) Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo circunscritível. Uma reta r divide $\mathcal{P}$ em dois polígonos de mesma área e mesmo perímetro. Mostre que r passa pelo centro do círculo inscrito em $\mathcal{P}$.

19. (IMO.) Em um quadrilátero convexo de área 32cm^2, a soma dos comprimentos de dois lados opostos e uma diagonal é 16cm. Calcule todos os comprimentos possíveis da outra diagonal.

5.2 Aplicações

Uma consequência imediata da proposição 5.4 é o critério a seguir para equivalência de triângulos.

Corolário 5.5. Sejam ABC e $A'BC$ triângulos tais que $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Então $A(ABC) = A(A'BC)$.

Prova. Sendo d a distância entre as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AA'}$ (cf. figura 5.4), temos que d é o comprimento das alturas de ABC e $A'BC$ relativas ao lado BC. Portanto,

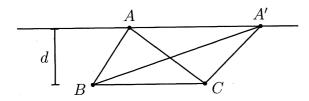



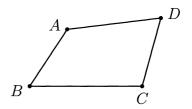
Figura 5.4: critério para equivalência de triângulos.

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot d = A(A'BC).$$

■

O corolário anterior pode ser usado para transformar um polígono em outro equivalente, com menor número de lados. Vejamos como fazer isso no exemplo seguinte.

Exemplo 5.6. Em relação à figura abaixo, construa com régua e compasso o ponto $E \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $A(ABE) = A(ABCD)$.

Solução.

Descrição dos passos.

1. Trace, pelo ponto D, a reta r, paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$.

2. Marque o ponto E de interseção de r com a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

3. Pelo corolário anterior, temos $A(ACD) = A(ACE)$; logo,

$$\begin{aligned} A(ABE) &= A(ABC) + A(ACE) \\ &= A(ABC) + A(ACD) \\ &= A(ABCD) \end{aligned}$$

■

Outra consequência interessante do corolário 5.5 é a possibilidade de provar o teorema de Pitágoras através do cálculo de áreas, conforme atesta o próximo exemplo.

Exemplo 5.7. Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, provemos, mediante o cálculo de áreas, as relações métricas

(a) $ah = bc$.

(b) $c^2 = an$ e $b^2 = am$.

(c) $a^2 = b^2 + c^2$.

(a) Basta ver que ambos ah e bc medem o dobro da área de ABC. De fato,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{ah}{2} \text{ e } A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{bc}{2}.$$

(b) Construa, exteriormente a ABC, os quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACJK$ (cf. figura 5.5) e seja I o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{AH}$ com FG. Como $\overleftrightarrow{AI} \parallel \overleftrightarrow{BG}$, segue do corolário 5.5 que

$$A(BGA) = A(BGH) = \frac{1}{2}\overline{BG} \cdot \overline{BH} = \frac{an}{2}.$$

Por outro lado, como $\overline{BD} = \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{BG}$ e $D\widehat{B}C = 90° + \widehat{B} = A\widehat{B}G$, os triângulos BCD e BGA são congruentes por LAL. Portanto, $A(BCD) = A(BGA) = \frac{an}{2}$ (I). Mas, uma vez que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$, aplicando novamente o corolário 5.5 obtemos $A(BCD) = A(ABD) = \frac{c^2}{2}$ (II). Segue, pois, de (I) e (II) que $c^2 = an$. Provar que $b^2 = am$ é análogo.

(c) Decerto que poderíamos agir como na prova do item (c) da proposição 4.9, somando membro a membro as duas relações do item (b). Alternativamente, o argumento da prova de (b) garante que

$$c^2 = A(ABDE) = 2A(ABD) = 2A(BGH) = A(BGIH);$$

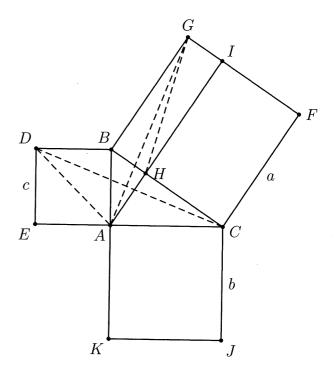



Figura 5.5: o teorema de Pitágoras pelo cálculo de áreas.

por outro lado, raciocinando de maneira análoga, obtemos

$$\begin{aligned} b^2 &= A(ACJK) = 2A(ACJ) = 2A(BCJ) \\ &= 2A(FCA) = 2A(FCH) = A(FCHI), \end{aligned}$$

de sorte que

$$b^2 + c^2 = A(BGIH) + A(FCHI) = A(BCFG) = a^2.$$

A fórmula para a área de um triângulo também nos dá uma maneira de calcular áreas de trapézios. Para tanto, convencionamos chamar de **altura** de um trapézio à distância entre as retas suportes de suas bases.

Proposição 5.8. Se $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ e altura h, então

$$A(ABCD) = \frac{(a+b)h}{2}.$$

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que $a > b$ (cf. figura 5.6). Se $E \in AB$ for tal que $\overline{AE} = b$, então o quadrilátero $AECD$ tem dois

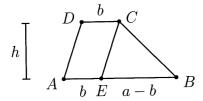



Figura 5.6: área de um trapézio.

lados paralelos e iguais, de modo que é um paralelogramo. Como $\overline{BE} = a - b$, temos

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(AECD) + A(EBC) \\ &= bh + \frac{(a-b)h}{2} = \frac{(a+b)h}{2}. \end{aligned}$$

■

Corolário 5.9. Se $ABCD$ é um losango de diagonais AC e BD, então

$$A(ABCD) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Prova. Nas notações da figura 5.7, temos

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ABC) + A(ACD) \\ &= \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BM} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DM} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD}. \end{aligned}$$

■

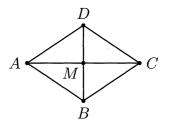



Figura 5.7: área de um losango.

A seguir, mostramos que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Proposição 5.10. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes. Sendo k a razão de semelhança de ABC para $A'B'C'$, temos

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = k^2.$$

Prova. Sejam $\overline{BC} = a$, $\overline{B'C'} = a'$ e h e h' as alturas de ABC e $A'B'C'$, respectivamente relativas a BC e $B'C'$ (cf. figura 5.8). Como

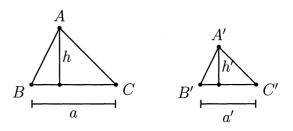



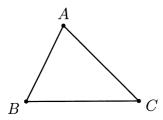
Figura 5.8: áreas de triângulos semelhantes.

$a = ka'$ e (pelo problema 3, página 168) $h = kh'$, segue que

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{ka' \cdot kh'}{a'h'} = k^2.$$

■

Exemplo 5.11. Em relação à figura abaixo, construa com régua e compasso pontos $D \in AB$ e $E \in AC$ tais que $DE \parallel BC$ e $A(ADE) = A(DBCE)$.

Solução.

Supondo o problema resolvido, temos $A(ADE) = \frac{1}{2}A(ABC)$. Por outro lado, como $ADE \sim ABC$, a proposição anterior garante que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \sqrt{\frac{A(ADE)}{A(ABC)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Basta, agora, executar as construções descritas a seguir:

DESCRIÇÃO DOS PASSOS.

1. Trace o semicírculo Γ de diâmetro AC e exterior a ABC.
2. Sendo M o ponto médio de AC, marque $P \in \Gamma$ tal que $PM \perp AC$. O teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo APC, garante que $\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AC}$.
3. Por fim, obtenha E como a interseção de AC com o círculo de centro A e raio $\overline{AP}$.

■

Terminamos esta seção apresentando algumas aplicações interessantes da fórmu la para a área de triângulos, utilizada em conjunção com outros resultados estudados anteriormente.

Proposição 5.12. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e semiperímetro p. Se r e r_a denotam, respectivamente, os raios dos círculos inscrito em ABC e ex-inscrito a BC, então

$$A(ABC) = pr = (p-a)r_a. \tag{5.2}$$

Prova. Sejam I o incentro e I_a o ex-incentro de ABC relativo a BC (cf. figura 5.9). Uma vez que as alturas dos triângulos AIB, AIC e

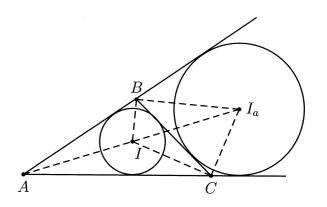



Figura 5.9: fórmulas para a área de um triângulo.

BIC, respectivamente relativas aos lados AB, AC e BC, são todas iguais a r, temos

$$\begin{aligned} A(ABC) &= A(AIB) + A(AIC) + A(BIC) \\ &= \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} = pr; \end{aligned}$$

por outro lado, uma vez que as alturas de $A(AI_aB)$, $A(AI_aC)$ e $A(BI_aC)$, respectivamente relativas aos lados AB, AC e BC, são todas iguais a r_a, temos

$$\begin{aligned} A(ABC) &= A(AI_aB) + A(AI_aC) - A(BI_aC) \\ &= \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = (p-a)r_a. \end{aligned}$$

■

Estamos, agora, em condições de provar outro corolário importante do teorema de Ptolomeu, conhecido na literatura como o **teorema de Carnot**[2].

Teorema 5.13 (Carnot). Se ABC é um triângulo acutângulo de circuncentro O, e x, y e z denotam as distâncias de O aos lados BC, AC e AB, respectivamente, então

$$x + y + z = R + r,$$

onde r e R denotam, também respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito a ABC.

Prova. Sejam M, N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC e AB, de modo que $OM \perp BC$, $ON \perp CA$ e $OP \perp AB$ (cf. figura 5.10). Os quadriláteros $BMOP$, $CNOM$ e $APON$, tendo,

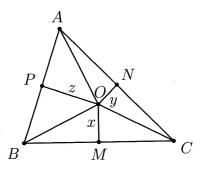



Figura 5.10: distâncias do circuncentro aos lados.

cada um, dois ângulos opostos retos, são todos inscritíveis. Denotando

[2]Após Lazare Carnot, matemático francês dos séculos XVIII e XIX, o primeiro a utilizar sistematicamente segmentos orientados em geometria.

$\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, e observando que $\overline{OM} = x$, $\overline{ON} = y$ e $\overline{OP} = z$, obtemos, pelo teorema de Ptolomeu, as igualdades

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{a}{2} &= R \cdot \frac{b}{2}, \\ x \cdot \frac{b}{2} + y \cdot \frac{a}{2} &= R \cdot \frac{c}{2}, \\ y \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{b}{2} &= R \cdot \frac{a}{2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Por outro lado como os triângulos OBC, OCA e OAB particionam o triângulo ABC, temos

$$A(ABC) = \frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2}.$$

Agora, denotando por p o semiperímetro de ABC, sabemos da proposição anterior que $A(ABC) = pr$; por sua vez, substituindo tal relação na última igualdade acima, obtemos

$$\frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2} = pr.$$

Por fim, somando membro a membro tal com aquelas em (5.3), obtemos

$$(x + y + z)p = (R + r)p,$$

a partir de onde segue o teorema de Carnot. ■

Para uma generalização do teorema de Carnot a triângulos obtusângulos, veja o problema 16, página 244.

Para nossa última aplicação necessitamos de uma definição preliminar. Nesse ponto, o leitor pode achar útil relembrar o conteúdo do teorema 4.27.

Definição 5.14. As **simedianas** de um triângulo são as cevianas isogonais a suas medianas. Seu ponto de concurso é o **ponto simediano** ou de **Lemoine**[3] do triângulo.

[3]Após Émile Lemoine, matemático francês do século XIX.

O ponto de Lemoine de um triângulo possui muitas propriedades interessantes, sendo a mais fundamental de todas aquela colecionada no próximo resultado.

Proposição 5.15. Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC. Se x e y denotam as distâncias de P aos lados AB e AC, respectivamente, então

$$\overrightarrow{AP} \text{ é simediana} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

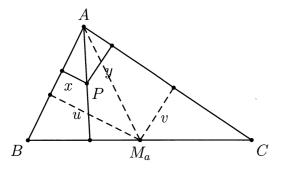



Figura 5.11: propriedade fundamental do ponto de Lemoine.

Prova. Seja M_a o ponto médio de BC. Nas notações da figura 5.11, o lema 4.26 garante que $\overrightarrow{AP}$ é simediana se, e só se, $\frac{x}{y} = \frac{v}{u}$. Para terminar, observe que, sendo h o comprimento da altura de ABC relativa a BC, temos

$$A(ABM_a) = \frac{1}{2}\overline{BM_a} \cdot h = \frac{1}{2}\overline{CM_a} \cdot h = A(ACM_a);$$

portanto,

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot u = A(ABM_a) = A(ACM_a) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot v$$

e, daí, $\frac{v}{u} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. ■

O resultado final desta seção caracteriza o ponto de Lemoine como a única solução do problema de minimização da soma dos quadrados das distâncias de um ponto de um triângulo às retas suportes de seus lados.

Teorema 5.16. A soma dos quadrados das distâncias de um ponto de um triângulo às retas suportes de seus lados é mínima se, e só se, tal ponto for o ponto simediano do triângulo.

Prova. Seja P um ponto no interior do triângulo ABC e x, y e z as distâncias de P respectivamente aos lados BC, AC e AB (cf. figura 5.12). Queremos mostrar que a soma $x^2 + y^2 + z^2$ é mínima se, e só se, P for o ponto simediano de ABC.

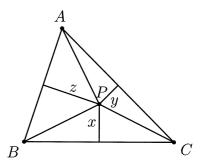



Figura 5.12: o ponto simediano como ponto de mínimo.

Para tanto, sejam $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Denotando $S = A(ABC)$, temos

$$S = A(ABP) + A(BCP) + A(CAP) = \frac{ax + by + cz}{2}$$

e, daí, $2S = ax + by + cz$. Portanto, aplicando a desigualdade de Cauchy (cf. teorema 7.14 do volume 1), obtemos

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ax + by + cz)^2 = 4S^2,$$

de sorte que

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Agora, a condição de igualdade na desigualdade de Cauchy garante que haverá igualdade na desigualdade acima se, e só se, tivermos

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Por sua vez, de acordo com a proposição anterior, sabemos que as relações acima são satisfeitas se, e só se, P for o ponto simediano de ABC. ∎

Problemas – Seção 5.2

1. Construa, com régua e compasso, um triângulo de área igual à área de um quadrado dado.

2. (Hungria.) Sejam $ABCD$ um paralelogramo e EFG um triângulo cujos vértices estão situados sobre os lados de $ABCD$. Prove que
$$A(ABCD) \geq 2A(EFG).$$

3. (Argentina.) Três formigas, inicialmente situadas em três dos vértices de um retângulo, se movem uma por vez e de acordo com a seguinte regra: quando uma formiga se move, ela se desloca na direção paralela à formada pelas outras duas formigas. É possível que em algum instante as formigas estejam situadas nos pontos médios do retângulo original?

4. Seja ABC um triângulo qualquer.

   (a) Prove que com as medianas de ABC podemos formar um triângulo DEF.

   (b) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos ABC e DEF.

5. (Torneio das Cidades.) Em um hexágono convexo $ABCDEF$, temos $AB \parallel CF$, $CD \parallel BE$ e $EF \parallel AD$. Prove que as áreas dos triângulos ACE e BDF são iguais.

6. O trapézio $ABCD$, de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC, é retângulo em A. Se $\overline{BC}=\overline{CD}=13$cm e $\overline{AB}=18$cm, calcule a altura e a área do trapézio, assim como a distância do vértice A à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

7. (Torneio das Cidades.) Para quais inteiros positivos n é possível particionar um triângulo equilátero de lado n em trapézios de lados medindo 1, 1, 1 e 2?

8. $ABCD$ é um trapézio de bases BC e AD e lados não paralelos AB e CD. Seja E o ponto médio do lado CD e suponha que a área do triângulo AEB seja igual a 360 cm^2. Calcule a área do trapézio.

9. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC. Se as diagonais de $ABCD$ se intersectam em E, prove que
$$\sqrt{A(ABCD)}=\sqrt{A(ABE)}+\sqrt{A(CDE)}.$$

10. Por um ponto P no interior de um triângulo ABC traçamos retas paralelas aos lados de ABC. Tais retas particionam ABC em três triângulos e três paralelogramos. Se as áreas dos triângulos são iguais a 1cm^2, 4cm^2 e 9cm^2, calcule a área de ABC.

11. Seja ABC um triângulo de semiperímetro p, r o raio de seu círculo inscrito e r_a, r_b e r_c os raios de seus círculos ex-inscritos. Prove que
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}.$$

12. Prove que as simedianas de um triângulo acutângulo passam pelos pontos médios dos lados de seu triângulo órtico.

13. Prove que o ponto simediano de um triângulo retângulo é o ponto médio da altura relativa à hipotenusa.

14. Se P é um ponto sobre o lado BC de um triângulo ABC, mostre que AP é a simediana relativa a BC se, e só se,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

15. (OIM.) Seja ABC um triângulo de incentro I e baricentro G, tal que $2\overline{BC} = \overline{AC} + \overline{AB}$. Prove que $\overleftrightarrow{IG} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

16. * Generalize o teorema de Carnot para triângulos obtusângulos. Mais precisamente, mostre que, se ABC é um triângulo obtusângulo em A e x, y e z são respectivamente as distâncias do circuncentro O de ABC aos lados BC, AC e AB, então

$$-x + y + z = R + r,$$

onde r e R denotam, respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito a ABC.

17. $ABCDE$ é um pentágono inscrito em (i.e., com todos os seus vértices sobre) um círculo. Particionamos $ABCDE$ em três triângulos, por meio de diagonais que só se intersectam em vértices. Prove que, independentemente da maneira pela qual efetuemos tal partição, a soma dos raios dos círculos inscritos nos três triângulos que a compõem é sempre a mesma.

18. (Bulgária.) O trapézio $ABCD$ tem bases $\overline{AB} > \overline{CD}$ e lados não paralelos BC e AD; as diagonais AC e BD se intersectam no ponto O. Sejam K, L, M e N, respectivamente, os pontos de concurso das bissetrizes dos ângulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ e $\angle DOA$ com os lados AB, BC, CD e DA. Sejam, ainda, P o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{KL}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ e Q o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{KN}$ e $\overleftrightarrow{ML}$. Encontre todos os valores $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ para os quais o quadrilátero $ABCD$ e o triângulo POQ têm áreas iguais.

5.3 A área e o comprimento de um círculo

Vamos terminar este capítulo estudando como definir e calcular a área da região do plano delimitada por um círculo (à qual nos referiremos, doravante, simplesmente como a *área de um círculo*), assim como sua circunferência (i.e., seu comprimento). Para tanto, precisamos apresentar mais alguns fatos sobre polígonos.

Dizemos que um polígono é **regular** se todos os seus lados e todos os seus ângulos internos tiverem medidas iguais. Em particular, segue do problema 11, página 56, que, em um polígono regular de n lados, cada ângulo interno deve medir $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Observe que os polígonos regulares de três e quatro lados são, respectivamente, os triângulos equiláteros e os quadrados.

Para construir um polígono regular de n lados, divida um círculo de centro O em n arcos iguais, obtendo os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (cf. figura 5.13, para o caso $n = 7$). Como arcos iguais subentendem cordas iguais, o polígono $A_1A_2\ldots A_n$ tem n lados iguais. Por outro

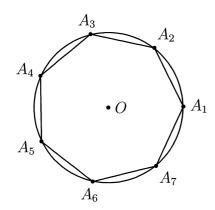



Figura 5.13: construindo polígonos regulares.

lado, pelo teorema do ângulo inscrito, temos

$$\begin{aligned} A_1\widehat{A}_2A_3 &= \frac{1}{2}\,A_1\overset{\frown}{A_n}A_3 = \frac{1}{2}(360^\circ - A_1\overset{\frown}{A_2}A_3) \\ &= \frac{1}{2}(360^\circ - A_1\widehat{O}A_2 - A_2\widehat{O}A_3) \\ &= \frac{1}{2}\left(360^\circ - 2\cdot\frac{360^\circ}{n}\right) \\ &= \frac{180^\circ(n-2)}{n} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$A_i\widehat{A}_{i+1}A_{i+2} = \frac{180^\circ(n-2)}{n},$$

para $2 \leq i \leq n$ (aqui, convencionamos que $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$). Portanto, todos os ângulos de $A_1A_2\ldots A_n$ também são iguais, de maneira que $A_1A_2\ldots A_n$ é um polígono regular de n lados.

Considere, agora, um polígono regular qualquer $A_1A_2\ldots A_n$, com $n \geq 4$, e trace as bissetrizes dos ângulos internos $\angle A_2A_1A_n$, $\angle A_1A_2A_3$ e $\angle A_2A_3A_4$. Seja O_1 o ponto de interseção das duas primeiras bissetrizes e O_2 o ponto de interseção das duas últimas. Como $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ e

$$A_2\widehat{A}_1O_1 = A_1\widehat{A}_2O_1 = A_3\widehat{A}_2O_2 = A_2\widehat{A}_3O_2 = \frac{90^\circ(n-2)}{n},$$

temos $O_1A_1A_2 \equiv O_2A_2A_3$ por ALA; em particular, $\overline{A_2O_1} = \overline{A_2O_2}$ e, daí, $O_1 = O_2$. Argumentando analogamente para cada terno de ângulos consecutivos do polígono, concluímos que as bissetrizes internas de todos os ângulos do mesmo passam por um só ponto O, e o resultado do problema 9, página 146, garante que $A_1A_2\ldots A_n$ é circunscritível (observe que o argumento acima também é válido para $n = 3$, bastando trocar os ângulos $\angle A_2A_1A_n$ e $\angle A_2A_3A_4$ respectivamente por $\angle A_2A_1A_3$ e $\angle A_2A_3A_1$).

Se O é o centro do círculo inscrito em $A_1A_2\ldots A_n$, a discussão do parágrafo anterior mostrou que, para $1 \leq i \leq n$, temos $\overline{A_1O} = \overline{A_2O} = \cdots = \overline{A_nO}$. Portanto, o círculo de centro O e raio igual a essa distância comum circunscreve o polígono. Resumimos essa discussão com a proposição a seguir.

Proposição 5.17. Todo polígono regular é inscritível e circunscritível, e os círculos inscrito e circunscrito têm um mesmo centro.

Seja $\Gamma(O;1)$ um círculo fixado, de raio 1. Para naturais $m, n \geq 3$, considere polígonos regulares $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{Q}_m$, respectivamente com n e m lados, sendo $\mathcal{P}_n$ inscrito e $\mathcal{Q}_m$ circunscrito a Γ. Então, $\mathcal{P}_n$ está contido no interior de $\mathcal{Q}_m$ e, escrevendo $A(\mathcal{P}_n)$ e $A(\mathcal{Q}_m)$ para denotar suas áreas, segue do postulado 3, no início deste capítulo, que

$$A(\mathcal{P}_n) < A(\mathcal{Q}_m).$$

A proposição 1.17 do volume 1 garante, então, que

$$\sup\{A(\mathcal{P}_n);\ \mathcal{P}_n \text{ é inscrito em } \Gamma\} \leq \inf\{A(\mathcal{Q}_m);\ \mathcal{Q}_m \text{ é circunscrito a } \Gamma\}.$$

Gostaríamos de mostrar que os dois números acima são iguais e, em seguida, definir a área de Γ por

$$A(\Gamma) = \sup\{A(\mathcal{P}_n);\ \mathcal{P}_n \text{ está inscrito em } \Gamma\} \tag{5.4}$$

(ou, o que seria o mesmo, $A(\Gamma) = \inf\{A(\mathcal{Q}_m);\ \mathcal{Q}_m$ é circunscrito a $\Gamma\}$). Para tanto, suponha que mostramos, para $k \geq 3$, a desigualdade

$$A(\mathcal{Q}_{2^k}) - A(\mathcal{P}_{2^k}) < \left(\frac{3}{4}\right)^{k-3} c, \qquad (5.5)$$

onde $c = A(\mathcal{Q}_8) - A(\mathcal{P}_8)$ é a diferença entre as áreas dos octógonos circunscrito e inscrito em Γ. Então, o resultado do problema 11 da seção 6.2 do volume 1 fornece

$$A(\mathcal{Q}_{2^k}) - A(\mathcal{P}_{2^k}) < \frac{3c}{k},$$

e a igualdade desejada (5.4) segue de uma variante óbvia da proposição 1.18 do volume 1.

Precisamos, pois, estimar a diferença entre as áreas dos polígonos regulares de 2^k lados, circunscrito e inscrito em Γ. Comecemos obtendo uma estimativa ligeiramente mais geral.

Considere os polígonos regulares $\mathcal{P}_n = A_1A_2\ldots A_n$, inscrito em Γ, e $\mathcal{Q}_n = B_1B_2\ldots B_n$, circunscrito a Γ, posicionados de tal forma que, para $1 \leq i \leq n$, o vértice A_i seja o ponto de tangência do lado B_iB_{i+1} com Γ (cf. figura 5.14; novamente aqui, convencionamos que $B_{n+1} = B_1$). Sejam $l_n = \overline{A_iA_{i+1}}$ o lado de $\mathcal{P}_n$, C_i o ponto de interseção dos segmentos A_iA_{i+1} e OB_{i+1} e $b_n = \overline{C_iB_{i+1}}$ (tal distância independe do natural $1 \leq i \leq n$ escolhido, graças à congruência dos triângulos isósceles OA_iA_{i+1}). A diferença $\Delta_n = A(\mathcal{Q}_n) - A(\mathcal{P}_n)$ é dada por

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} A(A_iA_{i+1}B_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\overline{A_iA_{i+1}} \cdot \overline{C_iB_{i+1}} = \frac{n}{2}l_nb_n. \qquad (5.6)$$

Seja, agora, D_i o ponto de interseção do segmento OB_{i+1} com Γ, e E_i a interseção de A_iB_{i+1} com a mediatriz de A_iD_i. É imediato verificar que A_iD_i é um lado de $\mathcal{P}_{2n}$ e que E_i é um vértice de $\mathcal{Q}_{2n}$ (um

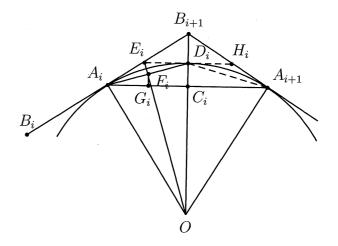



Figura 5.14: cálculo de Δ_n.

lado de $\mathcal{Q}_{2n}$ é o segmento E_iH_i na figura 5.14), de tal sorte que

$$\begin{aligned}\Delta_{2n} &= \sum_{i=1}^{n}(A(A_iD_iE_i) + A(D_iA_{i+1}H_i)) = 2\sum_{i=1}^{n} A(A_iD_iE_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{A_iD_i} \cdot \overline{E_iF_i} = nl_{2n}b_{2n},\end{aligned} \qquad (5.7)$$

onde F_i é o ponto médio de A_iD_i. Precisamos, agora, do seguinte resultado auxiliar.

Lema 5.18. Seja ABC um triângulo retângulo em B. Se P é o pé da bissetriz interna relativa a BC, então $\overline{BP} < \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Prova. Se Q é o pé da perpendicular baixada de P à hipotenusa AC, segue da caracterização da bissetriz como LG que

$$\overline{PB} = \overline{PQ} < \overline{PC}$$

e, daí, $\overline{PB} < \frac{1}{2}\overline{BC}$. ∎

Para continuar, note que o teorema do ângulo inscrito nos dá (figura 5.14)

$$B_{i+1}\widehat{A}_iD_i = D_i\widehat{A}_iA_{i+1} = D_i\widehat{A}_iC_i = \frac{180^\circ}{n}$$

(verifique esta última igualdade). Assim, A_iD_i é bissetriz interna do triângulo retângulo $A_iC_iB_{i+1}$ relativa ao cateto C_iB_{i+1}. Portanto, segue da caracterização da bissetriz como LG e do lema anterior que

$$b_{2n} = \overline{E_iF_i} = \overline{F_iG_i} < \overline{C_iD_i} < \frac{1}{2}\overline{C_iB_{i+1}} = \frac{b_n}{2}. \qquad (5.8)$$

Por outro lado, para $n \geq 8$ temos

$$B_{i+1}\widehat{A}_{i+1}C_i = \frac{360^\circ}{n} \leq 45^\circ,$$

de sorte que

$$\overline{C_iB_{i+1}} \leq \overline{A_{i+1}C_i} = \overline{A_iC_i} = \frac{l_n}{2}.$$

Portanto, aplicando sucessivamente a desigualdade triangular, o lema 5.18 e a última desigualdade acima ao triângulo $A_iC_iD_i$, obtemos (novamente para $n \geq 8$)

$$l_{2n} = \overline{A_iD_i} < \overline{A_iC_i} + \overline{C_iD_i} < \frac{l_n}{2} + \frac{1}{2}\overline{C_iB_{i+1}} \leq \frac{l_n}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{l_n}{2} = \frac{3l_n}{4}.$$

Finalmente, segue de (5.6), (5.7) e (5.8) que

$$\Delta_{2n} = nl_{2n}b_{2n} < n\cdot\frac{3l_n}{4}\cdot\frac{b_n}{2} = \frac{3}{4}\Delta_n$$

para $n \geq 8$.

Estamos, por fim, em condições de provar (5.5): segue da desigualdade acima e da fórmula para produtos telescópicos que

$$\frac{\Delta_{2^k}}{\Delta_8} = \prod_{j=3}^{k-1}\frac{\Delta_{2^{j+1}}}{\Delta_{2^j}} < \prod_{j=3}^{k-1}\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-3},$$

como desejado.

Conforme antecipamos alguns parágrafos atrás, a discussão acima nos permite enunciar a definição a seguir.

Definição 5.19. Definimos o número real π como a área de um círculo de raio 1.

A partir da definição acima, um argumento simples (cf. problema 3, página 257) mostra que a área de um círculo de raio R é dada por πR^2.

Por outro lado, a fim de obtermos aproximações numéricas para o valor de π, utilizamo-nos do argumento apresentado acima, o qual provou a boa definição da área de um círculo: tomamos um círculo Γ, de raio 1, e consideramos quadrados $ABCD$ e $EFGH$, o primeiro inscrito e o segundo circunscrito a Γ (cf. figura 5.15). É imediato que

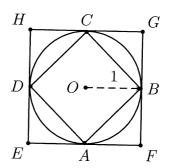



Figura 5.15: aproximações para π.

$\overline{EF} = 2$ e, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AB} = \sqrt{2}$, de maneira que

$$2 = A(ABCD) < \pi < A(EFGH) = 4.$$

Podemos refinar o argumento acima com o auxílio dos problemas 4 e 5, página 257, bem como seus análogos para polígonos regulares circunscritos a Γ, obtendo, assim, aproximações numéricas melhores

para π. Para referências futuras, o valor aproximado de π, com cinco casas decimais corretas, é

$$\pi \cong 3{,}14159.$$

Observamos, ainda, que π é um número *irracional*[4] e referimos o leitor ao problema 14 da seção 6.4 do volume 3 para uma prova deste fato.

Dados um círculo Γ, de centro O e raio R, e um arco $\overset{\frown}{AB}$ de Γ, definimos o **setor circular** $A\overset{\frown}{O}B$ como a porção de Γ formada pela união dos raios OC, tais que $C \in \overset{\frown}{AB}$. Se $A\hat{O}B = \alpha$, dizemos que $A\overset{\frown}{O}B$ é um setor de ângulo α. A seguir, definiremos a área do setor $A\overset{\frown}{O}B$, mostrando que

$$A(A\overset{\frown}{O}B) = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi R^2$$

se α for o ângulo do setor.

Se $\alpha = 360° \cdot \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $m < n$, definimos a área do setor $A\overset{\frown}{O}B$ como sendo igual ao supremo das áreas dos polígonos $A_1A_2 \ldots A_{km}A_{km+1}O$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $A_1A_2 \ldots A_{kn}$ é um polígono regular de kn lados, inscrito em Γ e tal que $A_1 = A$, $A_{km+1} = B$. Então

$$\begin{aligned}\frac{A(A_1A_2 \ldots A_{km}A_{km+1}O)}{A(A_1A_2 \ldots A_{kn-1}A_{kn})} &= \frac{\sum_{i=1}^{km} A(A_iOA_{i+1})}{\sum_{i=1}^{kn-1} A(A_iOA_{i+1})} \\ &= \frac{km \cdot A(A_1OA_2)}{kn \cdot A(A_1OA_2)} = \frac{m}{n}.\end{aligned}$$

Uma vez que os cálculos acima são válidos para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$A(A\overset{\frown}{O}B) = \frac{m}{n} \cdot \pi R^2.$$

[4]O número π é de fato *transcendente*, i.e., não pode ser obtido como raiz de um polinômio não nulo de coeficientes racionais. Entretanto, uma prova desse fato foge ao escopo dessas notas e pode ser encontrada em [7]. Teremos mais a dizer sobre números transcendentes no Capítulo 8 do volume 6.

Suponha, agora, que $\alpha = 360° \cdot x$, com x irracional. Pelo problema 3 da seção 1.5 do volume 1, podemos tomar racionais $0 < r_1 < r_2 < \cdots < x$, tais que $\sup\{r_1, r_2, \ldots\} = x$. Seja $B_n \in \overset{\frown}{AB}$ o ponto tal que $A\hat{O}B_n = \alpha_n$, onde $\alpha_n = 360° \cdot r_n$. Então o setor circular $A\overset{\frown}{O}B_n$ está contido no setor $A\overset{\frown}{O}B$, mas a discrepância entre os ângulos de tais setores é cada vez menor, à medida que n aumenta. Portanto, estendendo da maneira natural o postulado 3 do início deste capítulo, definimos a área de $A\overset{\frown}{O}B$ como o supremo das áreas dos setores $A\overset{\frown}{O}B_n$. Mas, pelo que fizemos acima, temos

$$A(A\overset{\frown}{O}B_n) = r_n \pi R^2$$

e, daí,

$$\sup\{A(A\overset{\frown}{O}B_n)\} = \sup\{r_n\} \cdot \pi R^2 = x\pi R^2 = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi R^2.$$

Considerando novamente um círculo Γ, de raio R, terminemos este capítulo definindo e calculando seu **comprimento** ou **circunferência**, o qual será definido como o único real positivo $\ell(\Gamma)$ que satisfaz a seguinte condição: para todos os polígonos regulares $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, com $\mathcal{P}$ inscrito em Γ e $\mathcal{Q}$ circunscrito a Γ, temos

$$\ell(\mathcal{P}) \leq \ell(\Gamma) \leq \ell(\mathcal{Q}), \tag{5.9}$$

onde $\ell(\mathcal{P})$ denota o perímetro do polígono $\mathcal{P}$.

A seguir, mostraremos que $\ell(\Gamma)$ está bem definido e que

$$\ell(\Gamma) = 2\pi R.$$

Para intuirmos o porquê desse valor, considere outro círculo, de mesmo centro que Γ e de raio $R + \frac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Para n suficientemente grande, nossa intuição geométrica sugere ser razoável supor que uma boa aproximação para a área da região situada entre os dois círculos

Figura 5.16: o comprimento de um círculo de raio R.

(pintada de cinza, na figura 5.16) seja a área de um retângulo de base $\ell(\Gamma)$ e altura $\frac{1}{n}$. Assim,

$$\ell(\Gamma)\cdot\frac{1}{n}\cong\pi\left(R+\frac{1}{n}\right)^2-\pi R^2$$

ou, ainda,

$$\ell(\Gamma)\cong 2\pi R+\frac{1}{n}.$$

Admitindo também ser razoável supor que a aproximação acima é tanto melhor quanto maior for o natural n, devemos ter $\ell(\Gamma)=2\pi R$.

De um ponto de vista mais formal, para mostrar que a definição (5.9) faz sentido e calcular rigorosamente $\ell(\Gamma)$, consideremos novamente um polígono regular $\mathcal{P}_n=A_1A_2\ldots A_n$ inscrito em $\Gamma(O;R)$ (cf. figura 5.14). Sejam l_n o comprimento dos lados de $\mathcal{P}_n$ e (invocando novamente a congruência dos triângulos isósceles OA_iA_{i+1}) a_n a distância de O às retas suportes dos lados de $\mathcal{P}_n$.

Se $\Gamma'(O;a_n)$, as inclusões $\Gamma'\subset\mathcal{P}_n\subset\Gamma$ fornecem as desigualdades

$$\pi a_n^2<A(\mathcal{P}_n)<\pi R^2.$$

Mas, nas notações da figura 5.14, temos

$$A(\mathcal{P}_n)=\sum_{i=1}^{n}A(OA_iA_{i+1})=\frac{n}{2}l_na_n,$$

de sorte que

$$\pi a_n^2<\frac{n}{2}l_na_n<\pi R^2$$

ou, ainda,

$$2\pi a_n<nl_n=\ell(\mathcal{P}_n)<\frac{2\pi R^2}{a_n}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo OA_iC_i, obtemos

$$a_n=\sqrt{R^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

e, daí,

$$2\pi\sqrt{R^2-\frac{l_n^2}{4}}<\ell(\mathcal{P}_n)<\frac{2\pi R^2}{\sqrt{R^2-\frac{l_n^2}{4}}}<2\pi R.$$

Portanto,

$$2\pi R\sqrt{1-\frac{l_n^2}{4R^2}}<\ell(\mathcal{P}_n)<2\pi R. \tag{5.10}$$

Agora, segue do problema 4, página 257, que

$$l_{2n}^2=\frac{l_n^2}{4}+\left(R-\sqrt{R^2-\frac{l_n^2}{4}}\right)^2=\frac{l_n^2}{4}+\left(\frac{l_n^2}{4\left(R+\sqrt{R^2-\frac{l_n^2}{4}}\right)}\right)^2$$

$$=\frac{l_n^2}{4}+\frac{l_n^2}{16}\left(\frac{l_n}{R+\sqrt{R^2-\frac{l_n^2}{4}}}\right)^2.$$

Se $n = 6$, então os triângulos OA_iA_{i+1} são todos equiláteros, de sorte que $l_6 = R$. Se $n \geq 6$, segue do corolário 2.25 que $l_n \leq l_6 = R$ e, daí,

$$l_{2n}^2 = \frac{l_n^2}{4} + \frac{l_n^2}{16}\left(\frac{l_n}{R+\sqrt{R^2-\frac{l_n^2}{4}}}\right)^2 < \frac{l_n^2}{4} + \frac{l_n^2}{16} = \frac{5l_n^2}{16} < \frac{9l_n^2}{16}.$$

Os cálculos acima fornecem, para $k \geq 4$ inteiro,

$$l_{2^k} = l_8 \cdot \frac{l_{2^k}}{l_8} = l_8 \cdot \prod_{j=4}^{k} \frac{l_{2^j}}{l_{2^{j-1}}} < l_8 \cdot \prod_{j=4}^{k} \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-3} l_8 < \frac{3l_8}{k},$$

onde utilizamos novamente o resultado do problema 11 da seção 6.2 do volume 1 na última desigualdade. De posse da desigualdade acima e fazendo $n = 2^k$ em (5.10), concluímos que

$$2\pi R\sqrt{1 - \frac{9l_8^2}{4R^2k^2}} < 2\pi R\sqrt{1 - \frac{l_{2^k}^2}{4R^2}} < \ell(\mathcal{P}_{2^k}) < 2\pi R.$$

Segue, daí, que

$$\sup \ell(\mathcal{P}_n) = 2\pi R.$$

Por fim, argumentando de modo análogo (cf. problema 6, página 257), obtemos

$$\inf \ell(\mathcal{Q}_n) = 2\pi R, \tag{5.11}$$

conforme queríamos demonstrar.

Problemas – Seção 5.3

1. * Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dois polígonos regulares de n lados, cujos lados medem, respectivamente, l_1 e l_2. Prove que
$$\frac{A(\mathcal{P})}{A(\mathcal{Q})} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2.$$

2. Dois polígonos regulares de vinte lados têm lados de comprimentos 5cm e 12cm. Calcule o comprimento do lado de um outro polígono regular de vinte lados, sabendo que sua área é igual à soma das áreas dos dois polígonos dados.

3. * Prove que a área de um círculo de raio R é πR^2.

4. * Seja l_n o lado do polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio R. Prove que
$$2R^2 - l_{2n}^2 = R\sqrt{4R^2 - l_n^2}.$$
Em seguida, use a relação acima para calcular l_8 e l_{16}.

5. * Seja l_n o lado do polígono regular de n lados $\mathcal{P}_n$, inscrito em um círculo de raio R. Prove que
$$A(\mathcal{P}_n) = \frac{nl_n}{4}\sqrt{4R^2 - l_n^2}.$$

6. * Complete o argumento para a boa definição da circunferência de um círculo, provando (5.11).

7. Sejam A, B e C pontos colineares, com $B \in AC$, e Γ, Γ_1 e Γ_2 semicírculos de diâmetros respectivamente iguais a AC, AB e BC, situados em um mesmo semiplano dos determinados pela reta $\overleftrightarrow{AC}$. A reta r, perpendicular a AC e passando por B, intersecta Γ em D. Sendo S a área da porção de Γ que é exterior a Γ_1 e Γ_2, calcule a razão $\frac{\overline{BD}^2}{S}$.

8. Seja ABC um triângulo retângulo em A. Os semicírculos Γ_1 e Γ_2, tendo respectivamente AB e AC por diâmetros, não têm pontos em comum com o interior de ABC. Sendo Γ o círculo

circunscrito a ABC, prove que a soma das áreas das porções de Γ_1 e Γ_2 que são exteriores a Γ é igual à área de ABC[5].

9. Se Γ é o círculo circunscrito a um triângulo ABC, prove que a área de ABC é menor que metade da área de Γ.

10. * Sejam dados um círculo Γ, de centro O e raio R, e um arco $\overset{\frown}{AB}$ de Γ, tal que $A\widehat{O}B = \alpha$. Parafraseie os passos da discussão que definiu e calculou a área de setores circulares para definir e calcular o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$, mostrando que

$$\ell(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R.$$

11. Duas rodas dentadas, uma de raio R e outra de raio $4R$, giram acopladas, formando uma única engrenagem. Se a roda dentada menor dá 1000 voltas em uma hora, quantas voltas a roda dentada maior dá em meia hora?

12. É curioso que $\pi \cong \sqrt{2} + \sqrt{3}$; de fato, com cinco casas decimais corretas, temos $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 3{,}14626$ e, assim, $\pi \cong \sqrt{2} + \sqrt{3}$ com erro menor que $0,01$. Utilize essa informação para *retificar* um círculo de raio R com erro menor que $0,01$. De outra forma, dado um círculo de raio R, construa com régua e compasso um segmento de comprimento aproximadamente igual a $2\pi R$, com erro menor que $0,01$.

[5] Tais porções de Γ_1 e Γ_2 são conhecidas como as **lúnulas de Hipócrates**, em homenagem ao matemático e astrônomo grego Hipócrates de Chios, do século V a.C..

CAPÍTULO 6

O Método Cartesiano

Este capítulo é devotado ao estudo da Geometria Euclidiana Plana mediante a utilização do *método analítico* ou *Cartesiano*[1], em contraposição ao método sintético, que dominou a exposição até aqui, e do método trigonométrico, objeto do capítulo 7.

6.1 O plano Cartesiano

Trace em um plano duas retas perpendiculares x e y, que se intersectam no ponto O. Considere, em seguida, x e y como cópias de $\mathbb{R}$,

[1] É bastante comum os autores se referirem ao método analítico pelo uso da expressão *Geometria Analítica*. Contudo, nestas notas evitaremos tal expressão sistematicamente, para enfatizar que o objeto de estudo neste capítulo é, tão somente, um novo conjunto de métodos que serão utilizados no estudo dos problemas de Geometria Euclidiana Plana.

escolhendo uma mesma unidade de medida para ambas e fazendo O corresponder a 0 em ambas. Ficam, assim, determinadas sobre cada uma de tais retas duas semirretas, uma positiva e outra negativa, com a convenção de que, em cada uma delas, a semirreta positiva é indicada por meio de uma pequena seta (na figura 6.1 supusemos, por comodidade, que x é horizontal e y é vertical em relação ao plano do desenho). As retas x e y dividem o plano em quatro regiões (angulares), cada uma das quais determinada pelos semieixos das retas x e y que a delimitam. Denominamos tais regiões de **quadrantes**, os quais são numerados de 1 a 4, conforme a convenção de eixos da figura 6.1; em particular, o ponto A marcado na mesma se encontra no segundo quadrante.

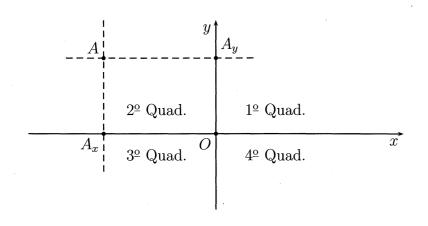



Figura 6.1: construção do plano Cartesiano

Dado um ponto qualquer no plano (A, por exemplo), trace por A uma reta perpendicular à reta x e outra perpendicular à reta y, as quais intersectam tais retas respectivamente nos pontos A_x e A_y. Reciprocamente, escolhidos arbitrariamente sobre x e y pontos A_x e A_y, as perpendiculares traçadas a x por A_x e a y por A_y intersectam-se

em um único ponto A do plano. Portanto, dar um ponto A no plano é o mesmo que dar suas projeções ortogonais A_x e A_y sobre as retas x e y, respectivamente.

Por outro lado, uma vez que as retas x e y estão sendo consideradas como cópias de $\mathbb{R}$, às projeções A_x e A_y do ponto A sobre x e y correspondem números reais x_A e y_A, respectivamente, os quais determinam completamente o ponto A (haja vista x_A e y_A determinarem os pontos A_x e A_y). Nesse caso, convencionamos escrever $A = (x_A, y_A)$ ou, ainda, $A(x_A, y_A)$. À guisa de exemplo, marcamos os pontos $A(-3, 2)$, $B(2, 1)$, $C(-4, -3/4)$ e $D(1, -\sqrt{2})$ na figura 6.2.

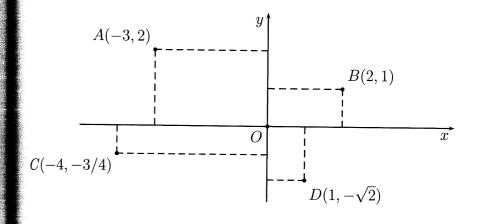



Figura 6.2: alguns pontos no plano Cartesiano

Em geral, fixadas em um plano retas x e y perpendiculares em O, e escolhidas em cada uma delas uma semirreta *positiva* de origem O, dizemos que o plano está munido de um **sistema de coordenadas Cartesiano**[2] xOy ou, ainda, que o plano Euclidiano tornou-se em um **plano Cartesiano**. Para um ponto $A(x_A, y_A)$ do mesmo, dizemos que x_A e y_A são as **coordenadas Cartesianas** do ponto A. Nesse

[2] Após René Descartes, matemático e filósofo francês do século XVII.

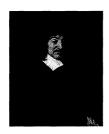



Figura 6.3: René Descartes, matemático e filósofo francês. Descartes é considerado o criador do método analítico, por ter sido quem primeiro utilizou sistema de coordenadas *Cartesianos* na análise de problemas de Geometria Euclidiana Plana. Em Filosofia, sua obra se destacou, principalmente, pelo tratado *Discurso sobre o Método*.

contexto, o número real x_A é a *coordenada*$-x$ ou a **abscissa** de A, ao passo que o real y_A é a *coordenada*$-y$ ou a **ordenada**[3] do ponto A. As retas x e y são respectivamente denominadas *eixo*$-x$ ou **eixo das abscissas** e *eixo*$-y$ ou **eixo das ordenadas** do sistema Cartesiano em questão. Em particular, os pontos situados sobre os eixos x e y têm coordenadas Cartesianas respectivamente da forma $(x_0, 0)$ e $(0, y_0)$; o ponto O, que representa 0 em ambos os eixos, tem, no sistema Cartesiano sob consideração, ambas as coordenadas iguais a zero.

Doravante, sempre que nos referirmos às coordenadas de um ou mais pontos do plano, salvo menção explícita em contrário suporemos fixado no plano um sistema de coordenadas Cartesiano xOy.

Nosso primeiro resultado dá fórmulas para o cálculo das coordenadas de um ponto P que, situado sobre um segmento AB, o divida em dois segmentos cujos comprimentos estejam, entre si, numa certa razão dada. Evidentemente, pretendemos que tais fórmulas sejam dadas em

[3]Não confundir *ordenada* com *coordenada*; a ordenada de um ponto é uma de suas coordenadas.

termos das coordenadas dos pontos A e B, bem como da razão em que o ponto P divide o segmento AB.

Proposição 6.1. São dados um real $t \in (0, 1)$ e os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Se $P(x_P, y_P)$ é o ponto sobre o segmento AB tal que $\overline{AP} = t \cdot \overline{AB}$, então

$$x_P = (1-t)x_A + tx_B \quad \text{e} \quad y_P = (1-t)y_A + ty_B. \tag{6.1}$$

Prova. Provemos que $x_P = (1-t)x_A + tx_B$, sendo a prova da outra relação do enunciado totalmente análoga. Se $x_A = x_B$, então o segmento AB é vertical e, daí,

$$x_P = x_A = (1-t)x_A + tx_A = (1-t)x_A + tx_B.$$

Se $x_A \neq x_B$, suponha, sem perda de generalidade, que $x_A < x_B$ (o caso $x_A > x_B$ é análogo). Sendo A', P' e B' as projeções ortogonais respectivamente de A, P e B sobre o eixo das abscissas (cf. figura 6.4), segue do teorema de Thales (cf. proposição 4.1) que

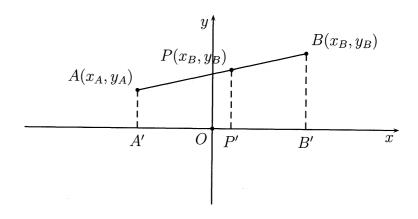



Figura 6.4: dividindo um segmento numa certa razão.

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = t.$$

Mas, como $A'(x_A, 0)$, $P'(x_P, 0)$ e $B'(x_B, 0)$, com $P' \in A'B'$ (posto que $P \in AB$) temos $\overline{A'P'} = x_P - x_A$ e $\overline{P'B'} = x_B - x_P$. Substituindo tais igualdades na relação acima, obtemos

$$\frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} = t$$

ou, o que é o mesmo, $x_P - x_A = t(x_B - x_A)$. Logo,

$$x_P = x_A + t(x_B - x_A) = (1-t)x_A + tx_B,$$

como queríamos mostrar. ∎

Para uma generalização importante da proposição anterior, veja o problema 8, página 282. Por ora, isolemos um caso particular relevante de tal proposição.

Corolário 6.2. Dados pontos A e B no plano, as coordenadas do ponto médio M do segmento AB são as médias aritméticas das coordenadas respectivas de A e de B. Mais precisamente, se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, então $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Prova. Sendo M o ponto médio de AB, temos $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Portanto, basta fazer $t = \frac{1}{2}$ em (6.1) para obter as coordenadas do ponto M. ∎

Observação 6.3. Nas notações da proposição 6.1, é sugestivo escrever

$$P = (1-t)A + tB \tag{6.2}$$

como abreviação das duas relações em (6.1). Em particular, abreviamos as coordenadas do ponto médio M do segmento AB escrevendo $M = \frac{A+B}{2}$. Doravante, faremos uso de tal abreviação sempre que necessário.

Conforme ilustrado pelo exemplo a seguir, o uso precípuo do método Cartesiano é seu emprego na dedução de resultados de Geometria Euclidiana Plana que, ainda que acessíveis pelo método sintético, têm abordagem analítica mais elementar.

Exemplo 6.4. Mostremos, com o uso do método analítico, que, em todo triângulo, as medianas concorrem no baricentro do triângulo e que o mesmo divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1.

Para tanto, seja ABC um triângulo qualquer, M o ponto médio do lado BC e G o ponto sobre a mediana AM tal que $\overline{AG} = 2\overline{GM}$. Então, $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM}$ e segue de (6.2) (com $t = \frac{2}{3}$) e do corolário 6.2 que

$$G = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}M = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{A+B+C}{3}. \tag{6.3}$$

Cálculos análogos com as demais medianas mostram que todas elas passam por esse mesmo ponto.

No que segue, deduzimos uma fórmula extremamente útil para o cálculo da distância entre dois pontos do plano em função de suas coordenadas.

Proposição 6.5. Para pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano, temos

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \tag{6.4}$$

Prova. Temos de considerar quatro casos separadamente: $x_A \leq x_B$ e $y_A \leq y_B$; $x_A \leq x_B$ e $y_A > y_B$; $x_A > x_B$ e $y_A \leq y_B$; $x_A > x_B$ e $y_A > y_B$. Contudo, uma vez que a análise de cada um de tais casos é essencialmente equivalente à dos demais, concentrar-nos-emos no caso $x_A \leq x_B$ e $y_A \leq y_B$ (cf. figura 6.5). Por simplicidade de notação, seja $A(a, b)$ e $B(c, d)$, de maneira que $a \leq c$ e $b \leq d$. Se $a = c$ (possibilidade à esquerda na figura 6.5), então temos claramente

$$\overline{AB} = d - b = |b - d| = \sqrt{0^2 + (b-d)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

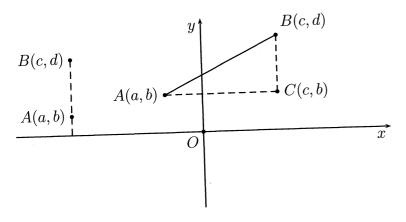



Figura 6.5: distância entre dois pontos no plano Cartesiano

Como o caso $b = d$ é análogo, suporemos, então, que $a < b$ e $c < d$ (possibilidade à direita na figura 6.5). Trace, por A, uma paralela ao eixo das abscissas e, por B, uma paralela ao eixo das ordenadas, e marque o ponto C de interseção das mesmas. Como C tem a mesma ordenada que A e a mesma abscissa que B, temos $C(c, b)$. Ademais, como os eixos Cartesianos são perpendiculares, o triângulo ABC é retângulo em C. Portanto, pelo teorema de Pitágoras e pelos dois casos acima, temos

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-c)^2 + (d-d)^2,$$

como queríamos provar. ■

Utilizemos a fórmula (6.4), juntamente com o corolário 7.17 do volume 1, para analisar o exemplo 2.28 com o auxílio do método analítico.

Exemplo 6.6. Nas notações da figura 6.6, existe um único ponto $P \in r$ para o qual $\overline{AP} + \overline{BP}$ tem comprimento mínimo. Ademais, tal ponto é obtido como a interseção das retas $\overleftrightarrow{AB'}$ e r, onde B' é o simétrico de B em relação à reta r.

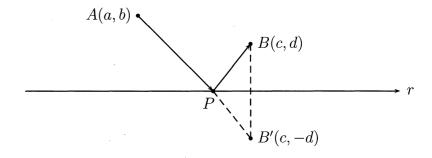



Figura 6.6: exemplo 2.28 via o método analítico.

Prova. Consideremos um sistema Cartesiano no plano, tal que r corresponda ao eixo das abscissas e em relação ao qual tenhamos $A(a, b)$ e $B(c, d)$. Sendo $P(x, 0)$, mostremos, inicialmente, que existe um único valor de x para o qual

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \sqrt{(a-x)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2}$$

seja mínimo. Para tanto, aplicando a desigualdade do corolário 7.17 do volume 1 com $n = 2$, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \sqrt{(a-x)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2}\\ &\geq \sqrt{((a-x) + (x-c))^2 + (b+d)^2}\\ &= \sqrt{(a-c)^2 + (b+d)^2}\\ &= \overline{AB'},\end{aligned}$$

onde $B'(c, -d)$ denota o simétrico de B em relação a r. Mas, uma vez que $\overline{BP} = \overline{B'P}$, a igualdade ocorre se, e só se, $\overline{AP} + \overline{B'P} = \overline{AB'}$, i.e., se, e só se, A, P e B' forem colineares. ■

O próximo exemplo utiliza a fórmula da distância entre dois pontos para examinar o problema da existência, no plano Cartesiano, de triân-

gulos equiláteros com vértices de coordenadas inteiras. Ainda em relação ao mesmo, um belo teorema de H. Minkowski[4] (cf. problema 10, página 371) garante que os quadrados são os únicos polígonos regulares do plano Cartesiano que podem ter todos os seus vértices de coordenadas inteiras.

Exemplo 6.7. Existem, no plano Cartesiano, pontos A, B e C de coordenadas inteiras e que sejam os vértices de um triângulo equilátero? Justifique sua resposta!

Solução. A resposta é não! De fato, supondo que tais pontos existissem, digamos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, com x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, $y_C \in \mathbb{Z}$, teríamos, de acordo com o problema 9, página 270, que $A(ABC) = \frac{m}{2}$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, aplicando o resultado do problema 4, página 4, concluímos que

$$A(ABC) = \overline{AB}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]\frac{\sqrt{3}}{4},$$

de maneira que, pela primeira parte, teríamos

$$\sqrt{3} = \frac{2m}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \in \mathbb{Q},$$

uma contradição. ■

Finalizamos esta seção utilizando a fórmula para a distância entre dois pontos para analisar um lugar geométrico que generaliza a noção de mediatriz de um segmento (a qual corresponde, nas notações da proposição a seguir, ao caso $k = 0$) e que completa a prova do teorema 4.34.

Proposição 6.8. Dados um número real k e pontos distintos A e B no plano, o LG dos pontos P do plano tais que $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = k^2$ é uma reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

[4] Após Hermann Minkowski, matemático alemão do século XIX.

Prova. Escolha um sistema Cartesiano tal que $A(0,0)$ e $B(a,0)$. Se $P(x,y)$, então a fórmula para a distância entre dois pontos garante que

$$\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = k^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) - ((x-a)^2 + y^2) = k^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2 + k^2}{2a}.$$

Mas isso é o mesmo que dizer que P pertence à reta vertical (logo, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$) formada pelos pontos de abscissa igual a $\frac{a^2+k^2}{2a}$. ■

Problemas – Seção 6.1

1. * Dados números reais a e b, prove que os pontos (a, b) e $(-a, -b)$ do plano Cartesiano são simétricos em relação à origem.

2. * Dado um sistema Cartesiano xOy, considere um outro sistema Cartesiano $x'O'y'$, onde o novo eixo das abscissas é a reta $y = y_0$ do sistema antigo e o novo eixo das ordenadas é a reta $x = x_0$ do sistema antigo. Se um ponto A do plano tinha coordenadas (x, y) no sistema antigo, prove que suas coordenadas no sistema novo são (x', y'), com $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$.

3. No plano Cartesiano, seja $P = \left(\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right)$. Se A e B são pontos de coordenadas inteiras, prove que $\overline{AP} \neq \overline{BP}$. Conclua, a partir daí, que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe um disco contendo exatamente n pontos de coordenadas inteiras em seu interior.

4. Mostre que, no plano Cartesiano, há infinitos polígonos regulares, de números de lados dois a dois distintos e tais que cada um deles contém exatamente 2012 pontos de coordenadas inteiras em seu interior.

5. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$. Se m_a é o comprimento da mediana relativa ao lado BC, prove que
$$a^2 + 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2).$$

6. * Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo de diagonais AC e BD, e M e N são respectivamente os pontos médios de tais diagonais, dizemos que o segmento MN é a **mediana de Euler** de $ABCD$. Prove o **teorema da Mediana de Euler**: nas notações acima,
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\,\overline{MN}^2.$$

7. (Romênia.) Dados $m, n > 1$ inteiros, sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_m$ pontos do plano, tais que $\overline{A_iB_j} = \sqrt{i+j}$. Prove que todos os pontos A_i são colineares, todos os pontos B_j são colineares, e que as duas retas que os contêm são perpendiculares.

8. * Dados, no plano, círculos Γ e Σ, dizemos que Γ intersecta Σ *segundo um diâmetro* se $\Gamma \cap \Sigma = \{A, B\}$, com AB diâmetro de Σ. Sejam dados dois círculos não concêntricos Γ_1 e Γ_2. Prove que o LG dos pontos do plano que são centros de círculos que intersectam Γ_1 e Γ_2 segundo diâmetros é a reta simétrica do eixo radical de Γ_1 e Γ_2 em relação ao ponto médio do segmento que une os centros dos círculos dados.

9. * No plano Cartesiano, seja $A_1A_2A_3$ um triângulo com vértices $A_i(x_i, y_i)$, para $1 \leq i \leq 3$. Mostre que
$$A(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\right|.$$
Conclua, a partir daí, que todo triângulo do plano Cartesiano, com vértices de coordenadas inteiras, tem área maior ou igual a $\frac{1}{2}$.

10. * Nas notações do problema anterior, prove que se A, B e C forem pontos de coordenadas inteiras, tais que $A(ABC) = \frac{1}{2}$, então ABC não contém outros pontos de coordenadas inteiras sobre seus lados nem em seu interior.

Para os dois problemas a seguir, precisamos generalizar a noção de polígono, da seguinte forma: dizemos que $\mathcal{P} = A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 3$, é um **polígono simples** de n lados se as seguintes condições forem satisfeitas (com a convenção de que $A_0 = A_n$ e $A_{n+1} = A_1$):

(a) os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são dois a dois distintos.

(b) os segmentos A_iA_{i+1} e A_jA_{j+1} se intersectam se, e só se, $|i-j| \leq 1$.

(c) para $1 \leq i \leq n$, os pontos A_{i-1}, A_i e A_{i+1} não são colineares.

Assumiremos, sem demonstração, que $\mathcal{P}$ divide o plano em duas regiões, exatamente uma das quais é limitada[5]; por sua vez, tal região limitada é denominada o **interior** de $\mathcal{P}$. Para $1 \leq i \leq n$, o **ângulo interno** de $\mathcal{P}$ no vértice A_i como o ângulo $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, de vértice A_i, lados $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$ e $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ e que intersecta o interior de $\mathcal{P}$.

11. * O propósito deste problema, dentre outros, é mostrar que, se $\mathcal{P}$ é um polígono simples de n lados, então $\mathcal{P}$ pode ser particionado em $n-2$ triângulos por meio de diagonais que só se intersectam em vértices de $\mathcal{P}$. Para tanto, faça os seguintes itens:

[5]Esse resultado está além do escopo destas notas, sendo conhecido como o **teorema da curva de Jordan**, em homenagem ao matemático francês do século XIX Camille Jordan.

(a) Fixe um sistema Cartesiano tal que nenhum lado de $\mathcal{P}$ seja paralelo ao eixo das ordenadas. Mostre que $\mathcal{P}$ admite um único ponto de abscissa máxima, o qual é um de seus vértices.

(b) Doravante, sejam A o vértice de $\mathcal{P}$ cuja existência é garantida pelo item (a), e B e C os vértices de $\mathcal{P}$ adjacentes a A. Se $BC \subset \mathcal{P}$, escreva $\mathcal{P} = ABC \cup \mathcal{P}'$; em seguida, aplique uma hipótese de indução adequada a $\mathcal{P}'$ para concluir o resultado.

(c) Se $BC \not\subset \mathcal{P}$, mostre que no interior de ABC existe um vértice D de $\mathcal{P}$ de abscissa máxima. Conclua que $AD \subset ABC$.

(d) *Cortando* $\mathcal{P}$ ao longo de AD, mostre que obtemos uma partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$, tal que $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ têm menos lados que $\mathcal{P}$. Por fim, aplique uma hipótese de indução adequada a $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ para concluir o resultado também neste caso.

Por fim, use o resultado aludido no enunciado para mostrar que a soma dos ângulos internos de $\mathcal{P}$ é igual a $180°(n-2)$.

12. O propósito deste problema é provar a famosa **fórmula de Pick**[6]: se $\mathcal{P}$ é um polígono simples no plano Cartesiano, com vértices de coordenadas inteiras, então

$$A(\mathcal{P}) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

onde I e B denotam, respectivamente, os números de pontos de coordenadas inteiras no interior e sobre os lados de $\mathcal{P}$. Para tanto, assumiremos sem demonstração a validade (também devido a G. Pick) da recíproca do problema 10, qual seja, que se A, B e C são pontos de coordenadas inteiras, tais que o triângulo

[6] Após Georg A. Pick, matemático austríaco do século XIX.

ABC não contém outros pontos de coordenadas inteiras sobre seus lados nem em seu interior, então $A(ABC) = \frac{1}{2}$. Nesse caso, diremos que ABC é um *triângulo fundamental* no plano Cartesiano. Faça, então, os seguintes itens:

(a) Mostre que todo triângulo com vértices de coordenadas inteiras pode ser particionado em triângulos fundamentais.

(b) Para os demais itens, seja $\mathcal{P}$ um polígono simples no plano Cartesiano, com vértices de coordenadas inteiras. Conclua, a partir do problema 11, que $\mathcal{P}$ pode ser particionado em um número finito de triângulos fundamentais.

(c) Suponha que $\mathcal{P}$ está particionado em k triângulos fundamentais, de sorte que a soma dos ângulos desses k triângulos é igual a $180°k$. Se $\mathcal{P}$ tem n lados e I e B são definidos como acima, mostre que a soma dos ângulos dos k triângulos fundamentais em que $\mathcal{P}$ está particionado é, por outro lado, igual a

$$180°(n-2) + 180°(B-n) + 360°I.$$

(d) Conclua, a partir de (c), que $k = 2I + B - 2$. Em seguida, use o fato de que a área de todo triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$ para demonstrar a fórmula de Pick.

13. (IMO.) Prove que, para todo inteiro $n > 2$, existe no plano um conjunto de n pontos satisfazendo as duas condições a seguir:

(a) A distância entre dois quaisquer deles é um número irracional.

(b) Cada três deles são não colineares e determinam um triângulo de área racional.

6.2 Retas no plano Cartesiano

Como frisado anteriormente, em tudo o que segue, supomos fixado um plano e um sistema Cartesiano de coordenadas no mesmo. Estudamos, a partir de agora, o problema de como representar retas do plano em um tal sistema; nesse sentido, temos o seguinte resultado fundamental.

Teorema 6.9. Toda reta do plano Cartesiano pode ser vista como o conjunto dos pontos (x, y) do mesmo que satisfazem uma equação da forma

$$ax + by + c = 0, \tag{6.5}$$

onde a, b e c são números reais tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Prova. Seja O a origem e r uma reta do plano Cartesiano. Suponha, inicialmente, que $O \notin r$. Se $A(a, b)$ é o pé da perpendicular baixada

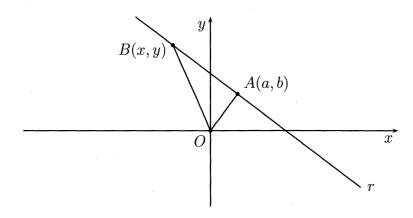



Figura 6.7: reta do plano Cartesiano não passando pela origem.

de O a r (cf. figura 6.7), é imediato que um ponto $B(x, y)$ do plano está sobre r se, e só se, $O\widehat{A}B = 90°$. Portanto, o teorema de Pitágoras

e sua recíproca garantem que

$$\begin{aligned}(x, y) \in r &\Leftrightarrow \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2\\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2) + [(x - a)^2 + (y - b)^2] = x^2 + y^2\\ &\Leftrightarrow ax + by - (a^2 + b^2) = 0,\end{aligned}$$

com (graças a $O \notin r$) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Segue que r é o conjunto das soluções (x, y) da equação $ax + by + c = 0$, com $c = -(a^2 + b^2)$.

Suponhamos, agora, que $O \in r$ (cf. figura 6.8) e, sobre a reta perpendicular a r traçada por O, marque um ponto qualquer $A(a, b)$. Como no primeiro caso, um ponto $B(x, y)$ do plano está sobre r se, e só se, $A\widehat{O}B = 90°$. Portanto, novamente pelo teorema de Pitágoras e sua recíproca, temos

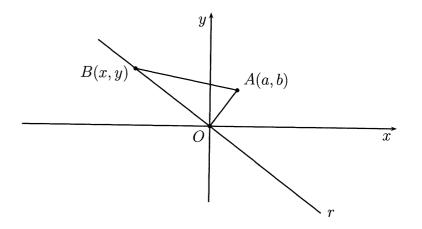



Figura 6.8: reta do plano Cartesiano passando pela origem.

$$\begin{aligned}(x, y) \in r &\Leftrightarrow \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2\\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2) + (x^2 + y^2) = [(x - a)^2 + (y - b)^2]\\ &\Leftrightarrow ax + by = 0,\end{aligned}$$

com (graças a $A \notin r$) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Segue que r é o conjunto das soluções (x, y) da equação $ax + by + c = 0$, com $c = 0$. ■

Nas notações do teorema anterior, dizemos que (6.5) é a **equação da reta** r, o que indicamos escrevendo

$$r : \{ax + by + c = 0\}.$$

Observação 6.10. Para todo real $k \neq 0$, também é lícito dizermos que

$$(ka)x + (kb)y + (kc) = 0$$

é a equação da reta r; de fato, não é difícil verificar que toda equação da reta r é dessa forma.

Doravante, utilizaremos tal observação sem maiores comentários.

Corolário 6.11. Se r é a reta do plano Cartesiano com equação $ax + by + c = 0$ e s é a reta perpendicular a r e passando pela origem, então s tem equação $-bx + ay = 0$.

Prova. De acordo com o teorema anterior, a reta s tem equação da forma $cx + dy = 0$, para certos $c, d \in \mathbb{R}$, não ambos nulos. Porém, como r tem equação $ax + by + c = 0$, segue da prova do teorema anterior que $(a, b) \in s$. Portanto, $ca + db = 0$ e, pela observação acima, podemos tomar $c = -b$, $d = a$. ■

Provemos, agora, a recíproca do teorema 6.9.

Corolário 6.12. Se a, b e c são reais tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então o conjunto-solução da equação $ax + by + c = 0$ representa uma reta no plano Cartesiano.

Prova. Suponhamos que $c \neq 0$, sendo a análise do caso $c = 0$ totalmente análoga. Escolha uma solução arbitrária $x = x_0$, $y = y_0$ da equação $ax + by + c = 0$, de maneira que $ax_0 + by_0 + c = 0$. Se s é a reta

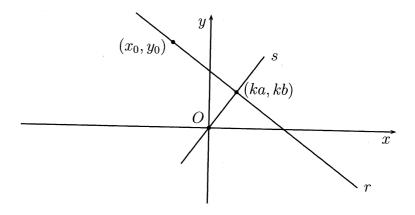



Figura 6.9: toda equação linear em x e y representa uma reta.

passando por $(0, 0)$ e (a, b), então s tem equação $-bx + ay = 0$. Seja r que passa por (x_0, y_0) e é perpendicular a s, digamos no ponto (ka, kb) (cf. figura 6.9). Pelo corolário anterior, r tem equação da forma $(ka)x + (kb)y + c' = 0$, para algum $c' \in \mathbb{R}$, ou, ainda, $ax + by + c'' = 0$, onde $c'' = \frac{c'}{k}$ (como $c \neq 0$, temos que $(0, 0) \notin r$, de sorte que $k \neq 0$). Mas, como $(x_0, y_0) \in r$, temos $ax_0 + by_0 + c'' = 0$ e segue do que fizemos acima que

$$c'' = -ax_0 - by_0 = c.$$

Assim, a equação da reta r é $ax + by + c = 0$. ■

Para o que segue, observe que uma reta $ax + by + c = 0$ é vertical no sistema Cartesiano escolhido se, e só se, $b = 0$. Portanto, se uma reta r de equação $ax + by + c = 0$ não for vertical, então podemos escrever sua equação equivalentemente como $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ou, mais sucintamente (escrevendo a no lugar de $-\frac{a}{b}$ e b no lugar de $-\frac{c}{b}$),

$$y = ax + b.$$

De posse do comentário acima, o próximo resultado apresenta a

condição necessária e suficiente usual para o paralelismo de duas retas em termos de suas equações.

Proposição 6.13. Duas retas não verticais r e s são paralelas se, e só se, têm equações da forma $y = ax + b$ e $y = ax + b'$, para certos números reais a, b e b', com $b \neq b'$.

Prova. Suponha, inicialmente, que $r \parallel s$, e que r tem equação $y = ax+b$ ou, o que é o mesmo, $ax - y + b = 0$. Pelo corolário 6.11, a reta t, de equação $x + ay = 0$ é perpendicular a r. Mas, como $r \parallel s$, também temos $s \perp t$ e, daí, mais uma aplicação do corolário 6.11 garante que s tem equação da forma $ax - y + b' = 0$, para algum $b' \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se r e s têm equações da forma $y = ax + b$ e $y = ax + b'$, com $b \neq b'$, então é imediato que o sistema de equações

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = ax + b' \end{cases}$$

não possui soluções, de sorte que $r \parallel s$ (a esse respeito, veja também o problema 5). ∎

Terminamos nosso estudo de retas derivando a condição necessária e suficiente usual para o perpendicularismo de duas retas em termos de suas equações em um certo sistema Cartesiano. Concentramo-nos somente no caso não trivial em que nenhuma das retas em questão é vertical ou horizontal em relação ao dito sistema.

Proposição 6.14. Duas retas não verticais r e s, de equações respectivamente $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, são perpendiculares se, e só se, $aa' = -1$.

Prova. Sabemos, pelo corolário 6.11, que a reta t, de equação $x + ay = 0$, (ou, equivalentemente, $y = -\frac{1}{a}x$) é perpendicular a r. Por outro lado, como $r \perp s \Leftrightarrow t \parallel s$, segue da proposição anterior que $r \perp s$ se, e só se, a equação de t é da forma $y = a'x + c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Por fim,

comparando as equações $y = -\frac{1}{a}x$ e $y = a'x + c$ para t, concluímos que a equação de t tem a forma $y = a'x + c$ se, e só se, $c = 0$ e $a' = -\frac{1}{a}$, i.e., se, e só se, $aa' = -1$. ∎

Vejamos, em um exemplo, como aplicar os resultados das proposições 6.13 e 6.14.

Exemplo 6.15. São dados no plano Cartesiano a reta r, de equação $2x - 3y + \sqrt{2} = 0$, e o ponto $A(2, -1)$. Encontre as equações das retas s e t, passando por A e tais que $s \parallel r$ e $t \perp r$.

Solução. Como r tem equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{3}$, segue das proposições 6.13 e 6.14 que as equações de s e t são, respectivamente, das formas $y = \frac{2}{3}x + c$ e $y = -\frac{3}{2}x + d$, onde $c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $A \in s, t$. Substituindo as coordenadas de A nas equações de s e t, obtemos $c = -\frac{7}{3}$ e $d = 2$. ∎

A seguir, damos mais um exemplo da utilização do método analítico em Geometria Euclidiana, no espírito do exemplo 6.4.

Exemplo 6.16. Provemos analiticamente que, em todo triângulo, as três alturas concorrem em um único ponto.

Prova. Seja ABC o triângulo, suposto, sem perda de generalidade, não-retângulo. Escolha um sistema Cartesiano no qual $A(0, a)$, $B(b, 0)$ e $C(c, 0)$, com $b, c \neq 0$ e $b \neq c$ (cf. figura 6.10). Uma das alturas de ABC é a reta $\{x = 0\}$. Para obter a equação das outras duas alturas, precisamos da equação das retas suportes dos lados AB e AC, para o quê nos valemos do resultado do problema 6:

$$\overleftrightarrow{AB} : \left\{\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1\right\} \text{ e } \overleftrightarrow{AC} : \left\{\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1\right\}$$

ou, ainda, $\overleftrightarrow{AB} : \{y = -\frac{a}{b}x + a\}$ e $\overleftrightarrow{AC} : \{y = -\frac{a}{c}x + a\}$.

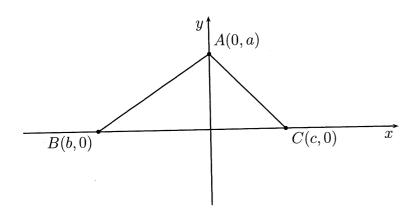



Figura 6.10: o ortocentro de um triângulo.

Sendo r e s, respectivamente, as retas suportes das alturas de ABC que passam por B e C, segue da proposição 6.14 que

$$r:\left\{y=\frac{c}{a}x+\beta\right\} \quad \text{e} \quad s:\left\{y=\frac{b}{a}x+\gamma\right\},$$

onde $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ são tais que $B\in r$ e $C\in s$. Substituindo as coordenadas de B e de C nas equações das retas r e s, respectivamente, obtemos $\beta=\gamma=-\frac{bc}{a}$ e, daí,

$$r:\{ay=cx-bc\} \quad \text{e} \quad s:\{ay=bx-bc\}.$$

Por fim, a solução do sistema

$$\begin{cases} ay=cx-bc \\ ay=bx-bc \end{cases}$$

nos dá as coordenadas do ponto H de interseção das retas r e s; mas, como $b\neq c$, é imediato do sistema acima que $x=0$, i.e., o ponto H também pertence à altura de ABC que passa por A. ■

Problemas – Seção 6.2

1. * Dados números reais a e b, prove que os pontos $A(a,b)$ e $B(b,a)$ do plano Cartesiano são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

2. * São dados os pontos $A(a,b)$, $B(c,d)$ e a reta vertical r, formada pelo conjunto dos pontos de abscissa x_0. Prove que A e B são simétricos em relação a r se, e somente se, $b=d$ e $x_0=\frac{a+c}{2}$.

3. * São dados os pontos $A(a,b)$, $B(c,d)$ e a reta horizontal r, formada pelo conjunto dos pontos de ordenada $y=y_0$. Prove que A e B são simétricos em relação a r se, e somente se, $a=c$ e $y_0=\frac{b+d}{2}$.

4. * Num sistema Cartesiano de origem O, temos pontos $A(a,b)$ e B, tais que A está no primeiro quadrante e B no segundo. Se $A\widehat{O}B=90°$ e $\overline{OA}=\overline{OB}$, prove que $B(-b,a)$.

5. * Interprete geometricamente os resultados da aplicação do método do escalonamento (cf. seção 3.1 do volume 1) ao sistema de equações

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}.$$

Mais precisamente, mostre que o sistema acima é possível determinado, possível indeterminado ou impossível, conforme as retas de equações $ax+by=e$ e $cx+dy=f$ sejam respectivamente concorrentes, paralelas ou *coincidentes* (i.e., iguais).

6. * No plano Cartesiano, mostre que a equação da reta que passa pelos pontos $(x_0,0)$ e $(0,y_0)$, com $x_0,y_0\neq 0$, é $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=1$.

7. Sejam a,b e c reais dados, sendo $c>0$. Calcule a área da região do plano delimitada pelos pares (x,y) de números reais tais que $|x-a|+|y-b|=c$.

8. * Dados, no plano Cartesiano, os pontos A e B, seja $P_t = (1-t)A + tB$, com $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que $P_t \in \overleftrightarrow{AB}$ e que para todo $P \in \overleftrightarrow{AB}$ existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $P = P_t$.

   (b) Discuta a posição do ponto P_t sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em função dos valores de t.

A descrição acima dos pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é denominada a **equação paramétrica** de $\overleftrightarrow{AB}$, com **parâmetro** t.

9. * São dados, no plano Cartesiano, um triângulo ABC e pontos P, Q e R, situados respectivamente sobre as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ e todos diferentes dos vértices de ABC. De acordo com o resultado do problema anterior, podemos escrever

$$P = (1-s)B + sC, \quad Q = (1-t)C + tA \quad \text{e} \quad R = (1-u)A + uB, \qquad (6.6)$$

para certos $s, t, u \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes *versões analíticas* dos teoremas de Ceva e Menelaus (cf. teoremas 4.21 e 4.24):

   (a) As retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BQ}$ e $\overleftrightarrow{CR}$ são concorrentes se, e só se,

$$stu = (1-s)(1-t)(1-u).$$

   (b) Os pontos P, Q e R são colineares se, e só se,

$$stu = -(1-s)(1-t)(1-u).$$

10. Dados pontos distintos B e C, sejam P e Q pontos situados sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, distintos de B e de C e tais que $P = (1-s)B + sC$ e $Q = (1-t)B + tC$. Prove que P e Q são conjugados harmônicos em relação a B e C (cf. problema 4, página 198) se, e só se, $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 2$.

6.3 Círculos no plano Cartesiano

Podemos examinar círculos do ponto de vista analítico como aplicação direta da fórmula (6.4). Para tanto, lembre-se de que o círculo $\Gamma(C; R)$ do plano é definido como o conjunto dos pontos A do plano cuja distância ao centro C é igual a R.

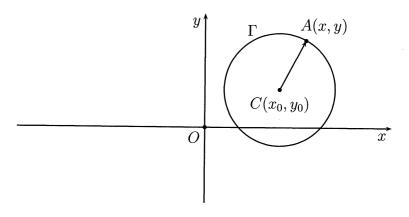



Figura 6.11: a equação de um círculo no plano Cartesiano.

Fixado no plano um sistema de coordenadas Cartesiano como na figura 6.11, sejam $C(x_0, y_0)$ e $A(x, y)$ um ponto qualquer. Segue de (6.4) que

$$\begin{aligned} A \in \Gamma &\Leftrightarrow \overline{AC} = R \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0. \end{aligned}$$

Dizemos, então, que

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0 \qquad (6.7)$$

é a **equação do círculo** de centro C e raio R.

Reciprocamente, será que toda equação da forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad (6.8)$$

tem como solução, no plano Cartesiano, o conjunto dos pontos de um círculo? Veremos que, salvo nos casos em que tal equação não possuir solução alguma ou possuir no máximo uma solução (x, y), a resposta é sim! Para tanto, comecemos completando quadrados em $x^2 + ax$ e $y^2 + by$, obtendo

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + ax + by + c = \\ = & \left(x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4}\right) + \left(c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right) \\ = & \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Portanto, (6.8) equivale à equação

$$\left(x - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - C.$$

Sendo $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, segue daí e da fórmula (6.4) para a distância entre dois pontos que o conjunto dos pontos $A(x, y)$ do plano Cartesiano que satisfazem (6.8) coincide com o conjunto

$$\left\{A;\ \overline{AC}^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c\right\}.$$

Há, então, três possibilidades:

- $\frac{a^2+b^2}{4} - c < 0$: nesse caso, é imediato que não há ponto A tal que $\overline{AC}^2 = \frac{a^2+b^2}{4} - c$, de sorte que o conjunto de pontos procurado é vazio.

- $\frac{a^2+b^2}{4} - c = 0$: uma solução qualquer $A(x, y)$ da equação deve satisfazer

$$\left(x - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = 0,$$

  e já sabemos que a única possibilidade nesse caso é $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$, i.e. $A = C$. Portanto, o conjunto de pontos procurado tem um único elemento.

- $\frac{a^2+b^2}{4} - c > 0$: os pontos A procurados são aqueles tais que

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c},$$

  i.e., o conjunto-solução de (6.8) é o círculo de centro $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e raio $R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - c}$.

A discussão acima provou o resultado a seguir.

Teorema 6.17. No plano Cartesiano, a equação

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

representa o conjunto vazio, um conjunto com um único elemento ou um círculo, conforme $\frac{a^2+b^2}{4} - c$ seja negativo, nulo ou positivo, respectivamente. Ademais, no último caso o centro do círculo é o ponto $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e seu raio é $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - c}$.

Caso nos seja dada uma equação da forma (6.8), a prova que construímos para o teorema acima é o procedimento a ser seguido a fim de descobrir se a mesma representa um conjunto vazio, unitário ou um círculo, bem como para achar o centro e o raio do círculo, se for o caso. De outra maneira, é totalmente desaconselhável decorar as fórmulas expostas no teorema, tanto porque podemos eventualmente esquecê-las, quanto porque o exercício de reconstrução da prova é, em casos particulares, bastante simples: basta completar quadrados! Vejamos um exemplo.

Exemplo 6.18. Identifique geometricamente o conjunto dos pontos (x, y) do plano Cartesiano que satisfazem a equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

Prova. Basta escrevermos sucessivamente

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 &= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 3^2) - 5 \\ &= (x-1)^2 + (y+3)^2 - 5 \end{aligned}$$

para concluir que o conjunto de pontos procurado é

$$\{(x, y); (x-1)^2 + (y-(-3))^2 = \sqrt{5}^2\},$$

i.e., o círculo de centro $(1, -3)$ e raio $\sqrt{5}$. ■

O próximo exemplo ilustra novamente o papel do método analítico na análise de problemas da Geometria Euclidiana Plana.

Exemplo 6.19. ABC é um triângulo isósceles, de lados iguais AC e AB. Se M é o ponto médio da base BC, prove analiticamente que $AM \perp BC$.

Prova. Sejam $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b$. Escolha um sistema Cartesiano no qual $B(0, 0)$, $C(b, 0)$ e A esteja situado no primeiro quadrante (cf. figura 6.12). Pelo corolário 6.2, temos $M\left(\frac{b}{2}, 0\right)$. Por outro lado, uma vez que $\overline{AB} = a$, o vértice A pertence ao círculo de centro B e raio a; analogamente, A está sobre o círculo de centro C e raio a, sendo mesmo individualizado por essas duas condições.

Portanto, as coordenadas de A formam a única solução (x, y), com $y > 0$, do sistema formado pelas equações dos círculos acima, i.e.,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ (x-b)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}.$$

Para resolvê-lo, comece desenvolvendo o primeiro membro da segunda equação e, em seguida, subtraindo membro a membro a primeira

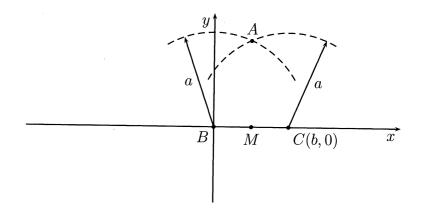



Figura 6.12: mediana relativa à base de um triângulo isósceles.

equação do resultado. Chegamos, assim, à igualdade $-2bx + b^2 = 0$ e, daí, a $x = \frac{b}{2}$. Isso já é suficiente para provar o resultado desejado: como A e M têm abscissas iguais a $\frac{b}{2}$, estão ambos situados sobre uma reta vertical, logo perpendicular ao eixo das abscissas e, portanto, ao lado BC. ■

Problemas – Seção 6.3

1. Em um plano Cartesiano, ABC é o triângulo com vértices $A(0, 0)$, $B(2, 1)$ e $C(1, 5)$. Encontre as coordenadas do ponto P do plano, tal que a soma dos quadrados das distâncias de P aos vértices de ABC seja a menor possível, e calcule o valor mínimo da soma correspondente.

2. * No plano Cartesiano, sejam Γ o círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ e r a reta de equação $ax + by = c$, onde a e b são constantes não nulas dadas e c é uma variável. Dentre todas as retas r que

intersectam Γ, encontre aquela tal que o valor de c é o maior possível. Em seguida, use o resultado assim obtido para dar outra prova da desigualdade de Cauchy (cf. teorema 7.14 do volume 1) para $n = 2$.

3. Dados, no plano, um círculo Γ e um ponto A, exterior ao disco delimitado por Γ, mostre como traçar, pelo ponto A, uma reta r que intersecte Γ em dois pontos B e P, tais que P seja o ponto médio do segmento AB. Discuta sob que condições há solução.

4. Dados um real positivo k e pontos distintos A e B no plano, encontre o LG dos pontos P do plano tais que $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = k^2$.

5. Dê uma outra prova do teorema 4.15, utilizando o método Cartesiano.

6. Se R denota o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC, de circuncentro O e baricentro G, prove que

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

O objetivo dos três problemas a seguir é estudar *elipses*, *hipérboles* e *parábolas*. Tais *curvas* são exemplos de **seções cônicas**, o nome *cônicas* vindo do fato de que as mesmas podem ser obtidas como interseções de um cone de revolução com planos em certas posições específica. Observamos que a definição e o estabelecimento das principais propriedades das seções cônicas (assim como o próprio nome cônicas) é devido a Apolônio de Perga[7].

7. * Fixados um real positivo a e dois pontos F_1 e F_2 no plano, tais que $2a > \overline{F_1F_2}$, o objetivo deste problema é estudar a **elipse**

[7]Sugerimos ao leitor [1] para um estudo mais aprofundado da geometria das seções cônicas.

de **focos** F_1 e F_2 e **eixo maior** $2a$, i.e., o lugar geométrico dos pontos do plano tais que

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \qquad (6.9)$$

(cf. figura 6.13). Para tanto, faça os seguintes itens:

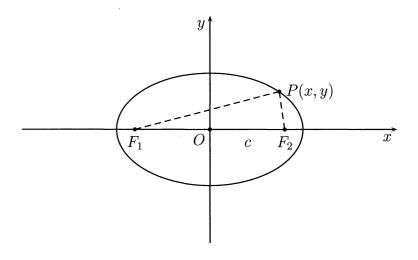



Figura 6.13: elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior $2a$.

(a) Escolha um sistema Cartesiano tendo por origem o ponto médio O do segmento F_1F_2 e tal que $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, onde $2c = \overline{F_1F_2}$ é a **distância focal**. Prove que, em um tal sistema, a elipse em questão coincide com o conjunto dos pontos (x, y) do plano Cartesiano tais que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (6.10)$$

onde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. A equação acima é denominada a **forma canônica** da elipse.

(b) Prove que a elipse acima descrita é simétrica em relação à reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, à mediatriz do segmento F_1F_2 e ao ponto médio de F_1F_2. Graças a esse resultado, dizemos que O é o **centro** da elipse ou, ainda, que a elipse é uma **cônica central**.

(c) Prove que a elipse acima passa pelos pontos $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$, estando inteiramente contida no retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e passando por A_1, A_2, B_1 e B_2 (por tal razão, os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são respectivamente denominados de **eixo maior** e **eixo menor** da elipse (6.10)).

8. * Generalizando o problema anterior, sejam dados um ponto F e uma reta d, tais que $F \notin d$. Para $\epsilon > 0$ também dado, definimos a **cônica** de **foco** F, **diretriz** d e **excentricidade** ϵ como a curva formada pelos pontos P do plano tais que

$$\overline{PF} = \epsilon \cdot \text{dist}(P;d), \qquad (6.11)$$

onde $\text{dist}(P;d)$ denota a distância de P à reta d. O **parâmetro** da cônica é a distância p de F a d.

(a) Escolha um sistema Cartesiano tal que $F(c,0)$ e $d : \{x = x_0\}$, com $x_0 > c$, de maneira que $p = x_0 - c$ (veja a figura 6.14, onde, por conveniência, tomamos $c > 0$ e esboçamos parte de uma cônica para facilitar a compreensão do leitor). Prove que um ponto $P(x,y)$ do plano Cartesiano (desenhado, por conveniência, à esquerda de d na figura 6.14) pertence à cônica em questão se, e só se,

$$(1-\epsilon^2)x^2 + 2(\epsilon^2 x_0 - c)x + y^2 = (\epsilon x_0)^2 - c^2.$$

(b) Transladando o eixo das ordenadas da posição atual para a posição da reta $x = \alpha$, prove que a nova equação da cônica

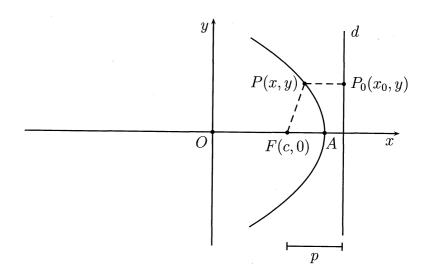



Figura 6.14: cônica de foco F, diretriz d e excentricidade ϵ.

é

$$(1-\epsilon^2)(x+\alpha)^2 + 2(\epsilon^2 x_0 - c)(x+\alpha) + y^2 = (\epsilon x_0)^2 - c^2.$$

Para os itens restantes, suponha $\epsilon \neq 1$.

(c) Escolhendo $\alpha = -\frac{\epsilon^2 x_0 - c}{1-\epsilon^2}$ e substituindo $p = x_0 - c$, conclua que a equação acima se torna

$$(1-\epsilon^2)x^2 + y^2 = \frac{\epsilon^2 p^2}{1-\epsilon^2}. \qquad (6.12)$$

(d) Mostre que, no novo sistema Cartesiano sob consideração, temos

$$F\left(\frac{\epsilon^2 p}{1-\epsilon^2}, 0\right) \text{ e } d : \left\{x = \frac{p}{1-\epsilon^2}\right\}.$$

(e) Mostre que (6.12) pode ser também escrita como

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\epsilon p}{|1-\epsilon^2|}\right)^2} \pm \frac{y^2}{\left(\frac{\epsilon p}{\sqrt{|1-\epsilon^2|}}\right)^2} = 1,$$

com os sinais + ou − escolhidos conforme seja respectivamente $0 < \epsilon < 1$ ou $\epsilon > 1$.

(f) Denotando $a = \frac{\epsilon p}{|1-\epsilon^2|}$, $b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{|1-\epsilon^2|}}$ e verificando, separadamente, os casos $0 < \epsilon < 1$ e $\epsilon > 1$, conclua que $a^2 \mp b^2 = c^2$, onde $c = \frac{\epsilon^2 p}{1-\epsilon^2}$ é a nova abscissa do ponto F.

(g) Por fim, mostre que a equação da cônica em questão assume uma das formas

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (6.13)$$

com os sinais + ou − escolhidos conforme seja respectivamente $0 < \epsilon < 1$ (elipses) ou $\epsilon > 1$ (hipérboles). A equação (6.13) é a **forma canônica** de uma cônica de excentricidade $\epsilon \neq 1$.

9. Prove que a excentricidade da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mede seu *achatamento* na direção y ou, equivalentemente, seu *alongamento* na direção x. Mais precisamente prove que, fixado o eixo maior A_1A_2, quando ϵ se aproxima de 1 (por valores menores que 1) a elipse fica cada vez mais *parecida* com o segmento A_1A_2, ao passo que, quando ϵ se aproxima de 0, a elipse fica cada vez mais "*parecida*" com o círculo de diâmetro A_1A_2.

10. * Nas notações do problema 8, se $\epsilon = 1$ temos a **parábola** de foco F e diretriz d. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$, faça os seguintes itens:

(a) Prove que o conjunto dos pontos (x, y) do plano Cartesiano tais que $y = ax^2 + bx + c$ é uma parábola e obtenha as coordenadas de seu foco F e sua diretriz d.

(b) Uma **tangente** à parábola do item (a) traçada a partir do ponto $P(x_0, y_0)$ sobre a mesma é uma reta r que intersecta a parábola somente em P. Mostre que tal reta é única e, sendo $y = mx + n$ sua equação, obtenha m e n em função de a, b, c, x_0 e y_0.

(c) Nas notações acima, prove que o simétrico do foco da parábola em relação à tangente r pertence à diretriz da mesma.

11. (OBM.) Fixada uma parábola no plano, traçamos três retas tangentes à mesma, as quais formam um triângulo ABC. Prove que o círculo circunscrito a tal triângulo sempre passa pelo foco da parábola.

12. (Espanha.) Sejam p e q números reais tais que $p^2 > q \neq 0$. Suponha que o gráfico da parábola $y = x^2 + 2px + q$ intersecta o eixo das abscissas nos pontos $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$. Seja, ainda, $C(0, q)$. Mostre que, independentemente dos valores de p e q, o círculo circunscrito ao triângulo ABC sempre passa por um mesmo ponto.

CAPÍTULO 7

Trigonometria e Geometria

Apresentamos, neste capítulo, os rudimentos da Trigonometria, tendo em vista o desenvolvimento de aplicações da mesma à Geometria Euclidiana Plana. Assim como no capítulo anterior, tencionamos desenvolver ferramentas de cálculo que permitam abordar problemas de geometria métrica para os quais os métodos desenvolvidos até aqui não sejam suficientes. O emprego de um tal conjunto de ferramentas a problemas geométricos é usualmente denominado o *método trigonométrico*.

7.1 Arcos trigonométricos

No plano Cartesiano, o **ciclo trigonométrico** é o círculo Γ da figura 7.1, centrado na origem $O(0,0)$, com raio 1 e comprimento 2π.

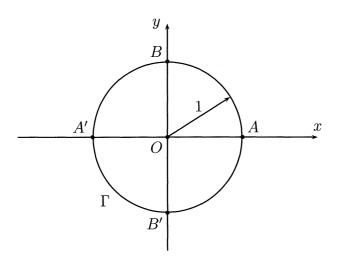



Figura 7.1: o ciclo trigonométrico.

Dado um número real c, medimos sobre Γ, a partir de A, um arco de comprimento $|c|$, no sentido anti-horário se $c > 0$ e no sentido horário se $c < 0$. Sendo P a extremidade final desse arco, dizemos que o arco $\overset{\frown}{AP}$ (de comprimento possivelmente maior que 2π) mede c **radianos**.

Observação 7.1. Vale frisar que *radiano* não é uma unidade de medida. É simplesmente um nome que utilizamos para nos referirmos a comprimentos de arcos marcados sobre o ciclo trigonométrico.

Sobre Γ, convencionamos que o **sentido trigonométrico** (de percurso) é o sentido *anti-horário*. Assim, o arco de 2π radianos sobre Γ é o arco que dá uma volta em Γ no sentido trigonométrico, retornando ao ponto A. Por outro lado, o arco de -2π radianos em Γ é o arco que dá uma volta em Γ no sentido horário, retornando também ao ponto A. Assim, temos as correspondências fundamentais a seguir:

- 2π radianos correspondem a $360°$ medidos no sentido trigonométrico a partir de A.

- -2π radianos correspondem a $360°$ medidos no sentido horário a partir de A.

Mais geralmente, sendo θ a medida em graus e c a medida em radianos de um mesmo arco, com $c > 0$, segue do problema 10, página 258, que

$$\frac{\theta}{360} = \frac{c}{2\pi}. \tag{7.1}$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação da fórmula acima.

Exemplo 7.2. Marque sobre o ciclo trigonométrico as extremidades finais dos arcos de $2\pi/3$, $-2\pi/3$, $\pi/4$ e π radianos.

Solução. O arco de $2\pi/3$ radianos é o arco $\overset{\frown}{AP}$ tal que $\ell(\overset{\frown}{AP}) = 2\pi/3$, medido a partir de A no sentido trigonométrico. Sendo θ a medida em graus correspondente a um tal arco, temos que

$$\frac{\theta}{360} = \frac{2\pi/3}{2\pi}$$

e, daí, $\theta = 120°$. Marcamos o ponto P na figura 7.2. O arco de $-2\pi/3$ radianos é o arco $\overset{\frown}{AP'}$ tal que $\ell(\overset{\frown}{AP'}) = 2\pi/3$, medido a partir de A no sentido horário. Assim, é imediato que P' é o simétrico de P em relação ao eixo das abscissas.

Como π é metade de 2π, o arco de π radianos é, na figura anterior, o arco $\overset{\frown}{AA'}$, medido no sentido anti-horário. Por fim, se β é a medida em graus do arco de $\pi/4$ radianos, então

$$\frac{\beta}{360} = \frac{\pi/4}{2\pi}$$

e, daí, $\beta = 45°$. Como o arco é positivo, seu ponto final é o ponto P da figura 7.3. ∎

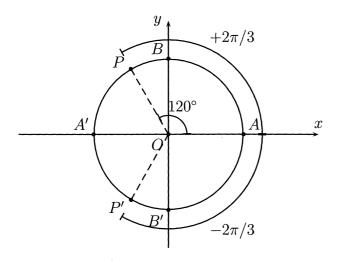



Figura 7.2: arcos de $\pm 2\pi/3$ radianos.

Exemplo 7.3. *Calcule em radianos os seguintes arcos, dados em graus:* 30°, 60°, 90°, 135°, 150°, 240°, 270°, 300°.

Solução. Aplicando (7.1) aos ângulos dados em graus, obtemos os valores correspondentes em radianos:

θ	30°	60°	90°	135°	150°	240°	270°	300°
c	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$

■

Exemplo 7.4. Calcule em graus os seguintes arcos, dados em radianos: $\pi/9$, $7\pi/2$, 18π, $11\pi/5$.

Solução. Escrevendo (7.1) como $\theta = \frac{c}{2\pi}\cdot 360$, e aplicando aos arcos em radianos do enunciado, obtemos os valores correspondentes em graus, colecionados na tabela abaixo:

c	$\pi/9$	$7\pi/2$	18π	$11\pi/5$
θ	20°	630°	3240°	396°

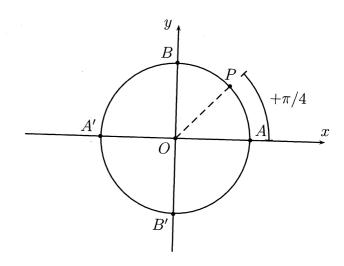



Figura 7.3: arco de $\pi/4$ radianos.

■

De agora em diante, mediremos arcos preferencialmente em radianos, fazendo a conversão para graus sempre que necessário.

Estamos finalmente em condições de definir o *seno*, o *cosseno* e a *tangente* de um arco c, dado em radianos, números estes coletivamente conhecidos como os **arcos trigonométricos** de c. Para tanto, tome o ponto P sobre o ciclo trigonométrico Γ tal que $\widehat{AP} = c$ (lembre-se de que, para marcar P, medimos o comprimento $|c|$ sobre Γ a partir de A, no sentido anti-horário se $c > 0$ e no sentido horário se $c < 0$).

Definição 7.5. Para $c \in \mathbb{R}$, definimos o **seno** e o **cosseno** de c (radianos), abreviados respectivamente $\operatorname{sen} c$ e $\cos c$, por (cf. figura 7.4):

$$\cos c = \text{abscissa de } P; \quad \operatorname{sen} c = \text{ordenada de } P.$$

A maior ordenada de um ponto de Γ é a de $B(0,1)$, igual a 1, ao passo que a menor ordenada é a de $B'(0,-1)$, igual a -1. Analoga-

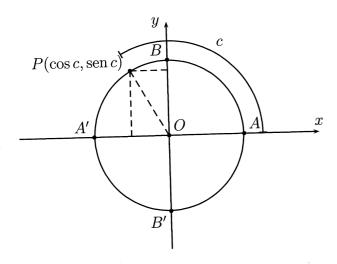



Figura 7.4: seno e cosseno de um arco.

mente, a maior abscissa de um ponto de Γ é a de $A(1,0)$, igual a 1; a menor abscissa é a de $A'(-1,0)$, igual a -1. Portanto,

$$\begin{cases} -1 \leq \operatorname{sen} c \leq 1 \\ -1 \leq \cos c \leq 1 \end{cases}. \tag{7.2}$$

Reciprocamente, fixado um real $\alpha \in [-1,1]$, a reta paralela ao eixo das abscissas traçada pelo ponto $(0,\alpha)$ intersecta Γ em pelo menos um ponto P; sendo $P(\operatorname{sen} c, \cos c)$, é imediato que $\operatorname{sen} c = \alpha$. Em outras palavras, todo número real no intervalo $[-1,1]$ é o seno (e, analogamente, o cosseno) de algum arco.

Para $k \in \mathbb{Z}$, é imediato que a extremidade final de um arco de $2k\pi$ radianos coincide com o ponto A de Γ. Mais geralmente, fixado $c \in \mathbb{R}$, a extremidade final de um arco de comprimento $c + 2k\pi$ coincide com aquela de um arco de comprimento simplesmente igual a c, de maneira que

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(c + 2k\pi) = \operatorname{sen} c \\ \cos(c + 2k\pi) = \cos c \end{cases} \tag{7.3}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

A proposição a seguir é conhecida como a **relação fundamental da trigonometria**.

Proposição 7.6. Para todo $c \in \mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c = 1. \tag{7.4}$$

Prova. Seja $\overset{\frown}{AP} = c$ (cf. figura 7.5). Como $P(\cos c, \operatorname{sen} c)$ e $O(0,0)$ segue da fórmula (6.4) e de $\overline{AP} = 1$ que

$$\sqrt{(\cos c - 0)^2 + (\operatorname{sen} c - 0)^2} = 1.$$

Mas essa é, precisamente, a relação do enunciado. ■

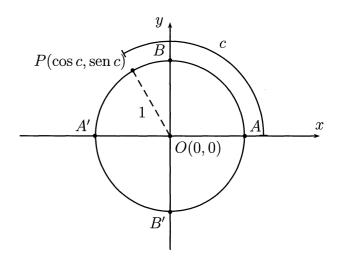



Figura 7.5: a relação fundamental da trigonometria.

Exemplo 7.7. O seno e o cosseno de um ângulo nos permitem descrever as **equações paramétricas** de um círculo. Mais precisamente, o círculo Γ de centro (x_0, y_0) e raio R tem equação $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 =$

R^2 (cf. figura 7.6). Um ponto genérico $P(x, y)$ sobre o mesmo pode ser pensado como uma partícula que percorre o círculo no sentido anti-horário, digamos a partir de $A(x_0 + R, y_0)$. Desde que $P(x, y) \in \Gamma$ se,

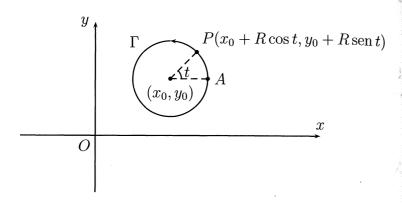



Figura 7.6: equações paramétricas do círculo.

e só se,

$$\left(\frac{x - x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{R}\right)^2 = 1,$$

podemos escrever, para um tal P sobre Γ,

$$\frac{x - x_0}{R} = \cos t, \quad \frac{y - y_0}{R} = \operatorname{sen} t,$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$ (aqui, a variável t – o *parâmetro* – é pensada como o tempo) e, daí,

$$x = x_0 + R\cos t, \quad y = y_0 + R\operatorname{sen} t.$$

Quando conveniente, podemos pedir que o movimento se dê a partir do ponto $Q(x_0 + R\cos t_0, y_0 + R\operatorname{sen} t_0)$ sobre Γ, escrevendo $x = x_0 + R\cos(t - t_0)$ e $y = y_0 + R\operatorname{sen}(t - t_0)$; podemos, ainda, exigir que seja completada uma volta inteira para $0 \leq t \leq 1$, escrevendo $x = x_0 + R\cos 2\pi(t - t_0)$ e $y = y_0 + R\operatorname{sen} 2\pi(t - t_0)$.

Definição 7.8. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $\cos c \neq 0$, a **tangente** de c, abreviada $\operatorname{tg} c$, por

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c}.$$

Nas notações da figura 7.4, observe que $\cos c = 0$ exatamente quando a extremidade final P do arco $\overset{\frown}{AP} = c$ coincidir com B ou B'. Por outro lado, é imediato que tal ocorre precisamente quando $c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $c = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Isso é o mesmo que dizer que $c = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$\operatorname{tg} c \text{ está definida se, e só se, } c \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Nos dois exemplos a seguir, calculamos os arcos trigonométricos de $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Exemplo 7.9. Calculemos o seno, o cosseno e a tangente de $\frac{\pi}{3}$ radianos (equivalente a 60°). Para tanto, marquemos no ciclo trigonométrico Γ o arco $\overset{\frown}{AP} = \frac{\pi}{3}$. O triângulo OAP é isósceles de base AP e ângulo $A\widehat{O}P = 60°$, logo equilátero. Sendo M o ponto médio de BC, temos $\cos\frac{\pi}{3} = \overline{OM} = \frac{1}{2}$ e, pelo corolário 4.11, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$.

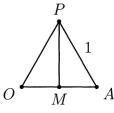



Figura 7.7: seno, cosseno e tangente de $\frac{\pi}{3}$.

Exemplo 7.10. Analogamente ao exemplo anterior, a fim de calcular o seno, o cosseno e a tangente de $\frac{\pi}{4}$ (equivalente em graus a 45°), marque sobre o primeiro quadrante do ciclo trigonométrico Γ o ponto P tal que $\overset{\frown}{AP} = 45°$ (cf. figura 7.8), e seja Q o pé da perpendicular baixada de P a OA. Como o triângulo OPQ é retângulo isósceles de

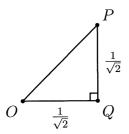



Figura 7.8: seno, cosseno e tangente de $\frac{\pi}{4}$.

hipotenusa $\overline{OP} = 1$, o teorema de Pitágoras fornece

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \overline{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \overline{OQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$.

Voltando à discussão geral, se $\overset{\frown}{AP} = c$, com $\frac{\pi}{2} < c < \pi$ (cf. figura 7.4), então P está na porção de Γ situada no segundo quadrante do plano Cartesiano, de maneira que a abscissa de P é negativa e sua ordenada é positiva. Portanto,

$$\cos c < 0, \quad \operatorname{sen} c > 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} < 0.$$

A esse respeito, veja também o problema 2, página 311.

A tangente de um arco de c radianos tem uma interpretação geométrica bastante útil, explicitada na proposição a seguir.

Proposição 7.11. Nas notações da figura 7.9, se $\overset{\frown}{AP} = c$ é um arco do primeiro ou terceiro quadrantes, então $\operatorname{tg} c = \overline{AP'}$; se $\overset{\frown}{AP} = c$ é um arco do segundo ou quarto quadrantes, então $\operatorname{tg} c = -\overline{AP'}$.

Prova. Façamos a prova no caso em que c é um arco do segundo quadrante (a prova nos demais casos é completamente análoga). Seja P'' o pé da perpendicular baixada de P ao eixo das abscissas. Pela semelhança dos triângulos $PP''O$ e $P'AO$, temos

$$\frac{\overline{PP''}}{\overline{P''O}} = \frac{\overline{P'A}}{\overline{AO}}.$$

Mas, como $\overline{PP''} = \operatorname{sen} c$, $\overline{P''O} = -\cos c$ e $\overline{AO} = 1$, ao efetuar essas substituições na igualdade acima, obtemos

$$\overline{P'A} = \frac{\overline{PP''}\cdot\overline{AO}}{\overline{P'A}} = -\operatorname{tg} c,$$

que é precisamente a relação do enunciado. ■

Uma consequência imediata da proposição acima é o fato de que de dois arcos diferem por um múltiplo inteiro de π, então suas tangentes são iguais. Em símbolos, $\operatorname{tg}(\pi + c)$ está definida se, e só se, $\operatorname{tg} c$ também estiver; nesse caso, temos ainda

$$\operatorname{tg}(\pi + c) = \operatorname{tg} c. \tag{7.5}$$

Para o que segue, estabelecemos a seguinte convenção: dado um ângulo θ, com $0° \leq \theta \leq 360°$, definimos o seno, o cosseno e a tangente de θ como sendo respectivamente iguais ao seno, o cosseno e a tangente do arco correspondente a θ em radianos, i.e., do arco $c = 2\pi \cdot \frac{\theta}{360}$. Por exemplo, para $\theta = 20°$, o arco correspondente é $c = \frac{\pi}{9}$ radianos. Assim, temos, por definição, que

$$\operatorname{sen} 20° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{9}, \quad \cos 20° = \cos\frac{\pi}{9} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg}\frac{\pi}{9}.$$

A proposição a seguir encerra um importante corolário do resultado anterior.

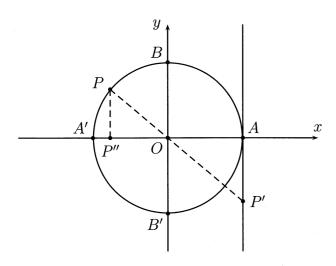



Figura 7.9: interpretação geométrica da tangente.

Proposição 7.12. Dada, no plano Cartesiano, uma reta não vertical de equação $y = ax + b$, o número real $a \neq 0$ é igual à tangente do ângulo trigonométrico que o eixo das abscissas forma com a reta. Mais precisamente, nas notações da figura 7.10, temos $a = \operatorname{tg} \alpha$.

Prova. Na figura 7.10, o círculo representa o ciclo trigonométrico. Pela Proposição 6.13, a reta paralela à reta $y = ax + b$ e passando pela origem tem equação $y = ax$. Como o ângulo trigonométrico que o eixo das abscissas forma com tal reta também é α, segue da proposição anterior (e das convenções acima) que a $\operatorname{tg} \alpha$ é igual à ordenada do ponto comum às retas de equações $y = ax$ e $x = 1$ da figura 7.10. Para tal ponto comum, temos $x = 1$ e $y = a \cdot 1 = a$, de sorte que $\operatorname{tg} \alpha = a$, como desejado. ■

Graças à proposição acima, se uma reta não vertical tem equação $y = ax + b$, dizemos que a é o **coeficiente angular** da reta. Cole-

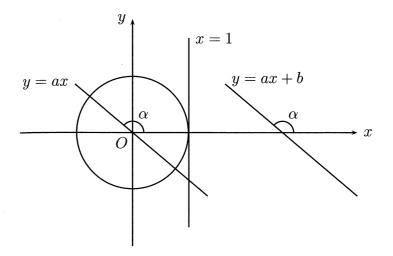



Figura 7.10: coeficiente angular de uma reta.

cionamos no exemplo a seguir uma aplicação importante da noção de coeficiente angular.

Exemplo 7.13. Em um certo sistema Cartesiano, temos um ponto (x_0, y_0) e um ângulo α tal que $0° < \alpha < 180°$. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto dado e forma ângulo trigonométrico α com o eixo das abscissas.

Prova. Se $\alpha = 90°$, então a reta é vertical, logo tem equação $x = x_0$. Se $\alpha \neq 90°$ (cf. figura 7.11), podemos supor que sua equação é da forma $y = ax + b$, para certos $a, b \in \mathbb{R}$. Pela proposição 7.12, temos $a = \operatorname{tg} \alpha$. Por outro lado, como o ponto (x_0, y_0) pertence à reta, devemos ter

$$y_0 = ax_0 + b = (\operatorname{tg} \alpha)x_0 + b$$

e, daí, $b = y_0 - (\operatorname{tg} \alpha)x_0$. Portanto, a equação da reta é

$$y = (\operatorname{tg} \alpha)x + y_0 - (\operatorname{tg} \alpha)x_0.$$

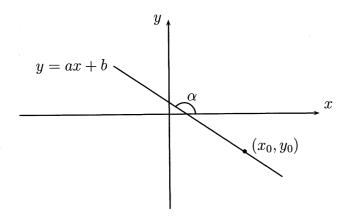



Figura 7.11: reta com coeficiente angular e ponto prescritos.

■

Nas notações do exemplo acima, vale frisar que é costume escrever a equação obtida para a reta em questão na forma

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (7.6)$$

Finalizemos essa discussão inicial sobre arcos trigonométricos relacionando o seno, cosseno e tangente de arcos que guardam certas relações simples entre si.

Proposição 7.14. Para todo $c \in \mathbb{R}$ temos

$$\operatorname{sen}(-c) = -\operatorname{sen} c \quad \text{e} \quad \cos(-c) = \cos c. \qquad (7.7)$$

Prova. Considere, no ciclo trigonométrico, as extremidades finais P e Q dos arcos $\overset{\frown}{AP} = c$ e $\overset{\frown}{AQ} = -c$ (a figura 7.12 ilustra o caso $\frac{\pi}{2} < c < \pi$; os demais são totalmente análogos). Como os arcos de c e $-c$ radianos têm comprimentos iguais mas são marcados em

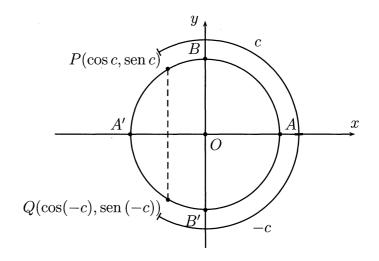



Figura 7.12: seno e cosseno de arcos opostos.

sentidos contrários (um no sentido trigonométrico e o outro no sentido horário), é imediato que P e Q são pontos simétricos em relação ao eixo das abscissas. Portanto, P e Q têm abscissas iguais mas ordenadas opostas. Mas, como $P(\cos c, \operatorname{sen} c)$ e $Q(\cos(-c), \operatorname{sen}(-c))$, segue então que $\cos c = \cos(-c)$ (abscissas iguais) e $\operatorname{sen} c = -\operatorname{sen}(-c)$ (ordenadas opostas). ■

Proposição 7.15. Para todo $c \in \mathbb{R}$ temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos c \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \operatorname{sen} c. \qquad (7.8)$$

Prova. Pela proposição anterior, basta mostrar que $\operatorname{sen}\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos c$ e $\cos\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} c$. Para tanto, argumentemos também como na prova anterior: considere, no ciclo trigonométrico, as extremidades finais P e Q dos arcos $\overset{\frown}{AP} = c$ e $\overset{\frown}{AQ} = c - \frac{\pi}{2}$ (novamente, ilustramos o caso $\frac{\pi}{2} < c < \pi$ na figura 7.13, e deixamos a verificação dos demais – totalmente análogos – ao leitor).

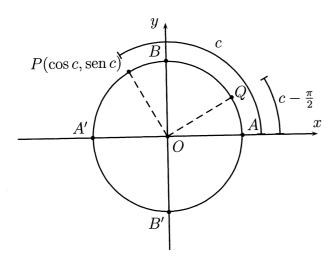



Figura 7.13: seno e cosseno de arcos complementares.

Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$ e $Q\widehat{O}P = 90°$, o problema 4, página 281, garante que, se $Q(x_0, y_0)$, então $P(-y_0, x_0)$. Mas, como

$$P(\cos c, \operatorname{sen} c) \ \text{ e } \ Q\left(\cos(c - \frac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(c - \frac{\pi}{2})\right),$$

devemos ter

$$-\cos c = \operatorname{sen}\left(c - \frac{\pi}{2}\right) \ \text{ e } \ \operatorname{sen} c = \cos\left(c - \frac{\pi}{2}\right),$$

conforme desejado. ■

Corolário 7.16. Para todo $c \in \mathbb{R}$ temos

$$\operatorname{sen}(\pi - c) = \operatorname{sen} c \ \text{ e } \ \cos(\pi - c) = -\cos c. \tag{7.9}$$

Prova. Provemos a fórmula para o seno (a dedução da fórmula para o cosseno é completamente análoga). Escrevendo $\pi - c = \frac{\pi}{2} - \left(c - \frac{\pi}{2}\right)$ e aplicando sucessivamente (7.8), (7.7) e (7.8), obtemos

$$\operatorname{sen}(\pi - c) = \cos\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \operatorname{sen} c.$$

■

Exemplo 7.17. De posse do resultado da proposição acima, é imediato calcular os arcos trigonométricos de $\frac{\pi}{6}$. De fato, desde que $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, temos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ e } \ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Problemas – Seção 7.1

1. Marque, sobre o ciclo trigonométrico da figura 7.14, os extremos dos arcos de $\pi/3$, $3\pi/4$, $3\pi/2$, $-\pi$, $-2\pi/3$, $-3\pi/2$, $-4\pi/3$ e $-5\pi/2$ radianos.

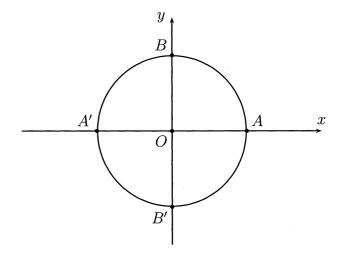



Figura 7.14: mais alguns arcos trigonométricos

2. * Marque, no ciclo trigonométrico da figura 7.15, os sinais do seno, cosseno e tangente de acordo com o quadrante do plano Cartesiano.

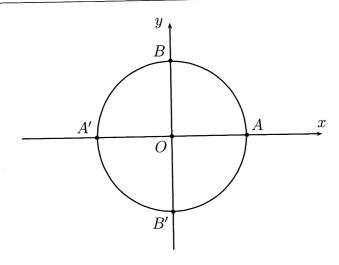



Figura 7.15: sinais do seno, cosseno e tangente de um ângulo

3. Calcule o seno, o cosseno e a tangente (se existir) dos arcos de π, $-\pi/2$, 4π, $7\pi/2$ e $-3\pi/2$ radianos.

4. Calcule o seno, o cosseno e a tangente de $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, $7\pi/6$, $4\pi/3$, $5\pi/4$, $5\pi/3$, $3\pi/2$, $7\pi/4$.

5. Dada a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (veja o problema 7, página 288), faça os seguintes itens:

   (a) Se (x, y) é um ponto sobre a mesma, prove que existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ para o qual $x = a\cos\theta$, $y = a\,\text{sen}\,\theta$, e reciprocamente. As equações $x = a\cos\theta$, $y = a\,\text{sen}\,\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, são as **equações paramétricas** da elipse, e podemos interpretá-las como uma descrição da *trajetória* de uma partícula que parte no instante $\theta = 0$ do ponto A, percorre a elipse no sentido anti-horário e volta ao ponto A no instante $\theta = 2\pi$.

   (b) Defina os **círculos diretores** da elipse como os círculos de

equações $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$. Trace pela origem O um raio de tais círculos formando um ângulo trigonométrico β com o eixo das abscissas e suponha que tal raio intersecta os círculos diretores acima respectivamente em S e Q. Se $P(x, y)$ é o ponto obtido como a interseção da paralela por Q ao eixo das abscissas com a paralela por S ao eixo das ordenadas, prove que P pertence à elipse (note que o processo acima permite construirmos – com régua e compasso – tantos pontos da elipse quanto queiramos).

7.2 Algumas identidades úteis

Continuamos nossa introdução à trigonometria deduzindo, nesta seção, algumas fórmulas bastante úteis, a começar pelas **fórmulas de adição de arcos**, coletadas na proposição a seguir.

Proposição 7.18. Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

(a) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$.

(b) $\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\, a \cos b \pm \cos a\, \text{sen}\, b$.

(c) $\text{tg}\,(a \pm b) = \frac{\text{tg}\, a \pm \text{tg}\, b}{1 \mp \text{tg}\, a \text{tg}\, b}$, sempre que $\text{tg}\, a$, $\text{tg}\, b$ e $\text{tg}\,(a \pm b)$ estiverem definidos.

Prova. Mostremos, inicialmente, a fórmula para $\cos(a+b)$. Suponha, sem perda de generalidade, $a, b > 0$ e marque, sobre o ciclo trigonométrico Γ, os pontos P, Q e R tais que $\stackrel{\frown}{AP} = a$, $\stackrel{\frown}{AQ} = -b$ e $\stackrel{\frown}{AR} = a + b$ (cf. figura 7.16). Então $P(\cos a, \text{sen}\, a)$, $Q(\cos(-b), \text{sen}\,(-b)) = (\cos b, -\text{sen}\, b)$ e $R(\cos(a + b), \text{sen}\,(a + b))$.

Como os arcos $\stackrel{\frown}{AR}$ e $\stackrel{\frown}{QP}$ (medidos no sentido anti-horário) são ambos iguais a $a + b$ radianos, as cordas subentendidas AR e PQ têm comprimentos iguais. Portanto, as igualdades

$$\overline{AR}^2 = (1 - \cos(a + b))^2 + \text{sen}\,^2(a + b)$$

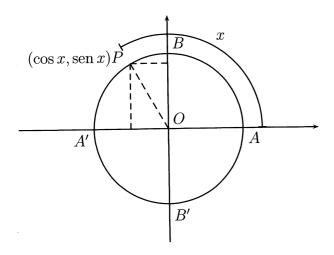



Figura 7.16: fórmulas de adição de arcos.

e

$$\overline{PQ}^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2$$

nos dão

$$(1 - \cos(a+b))^2 + \operatorname{sen}^2(a+b) = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2;$$

desenvolvendo ambos os membros dessa relação e observando as igualdades $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$, $\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b = 1$ e $\cos^2(a+b) + \operatorname{sen}^2(a+b) = 1$, obtemos

$$-2\cos(a+b) = -2\cos a \cos b + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

conforme desejado.

Quanto às demais fórmulas, veja que

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos(a + (-b)) = \cos a \cos(-b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b) \\ &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{sen} b \\ &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b; \end{aligned}$$

ademais, uma dedução análoga nos permite obter a fórmula para $\operatorname{sen}(a-b)$ (veja o problema 1, página 318). Por fim,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \\ &= \frac{\frac{1}{\cos a \cos b}(\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a)}{\frac{1}{\cos a \cos b}(\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}, \end{aligned}$$

valendo também aqui uma dedução análoga para $\operatorname{tg}(a-b)$ (cf. problema 1, página 318). ■

As fórmulas do corolário a seguir são frequentemente denominadas **fórmulas de arcos duplos**.

Corolário 7.19. Para todo real a, temos:

(a) $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$.

(b) $\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a$.

(c) $\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$, sempre que $\operatorname{tg} a$ e $\operatorname{tg} 2a$ estiverem definidas.

Prova. Basta fazer $b = a$ nas fórmulas com sinal + da proposição 7.18. ■

Exemplo 7.20. Uma aplicação computacional clássica das fórmulas de adição de arcos é o cálculo dos arcos trigonométricos de 75°. Para tanto, veja que $75° = 30° + 45°$, de maneira que

$$\begin{aligned} \cos 75° &= \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} 45° \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Como aplicação das fórmulas de adição de arcos, temos o seguinte resultado útil.

Proposição 7.21. Sejam a e b reais positivos fixados e θ um real variável. Então

$$|a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Prova. Escrevamos

$$a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \theta \right).$$

Agora, fazendo $x_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $y_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, temos $x_0^2 + y_0^2 = 1$, i.e., (x_0, y_0) pertence ao primeiro quadrante do ciclo trigonométrico. Portanto, existe $\alpha \in (0, \pi/2)$ tal que

$$\cos \alpha = x_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \alpha = y_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Segue, então, que

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \alpha) \end{aligned} \tag{7.10}$$

e, a partir de $|\cos(\theta - \alpha)| \leq 1$, obtemos

$$|a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta| = \sqrt{a^2 + b^2} |\cos(\theta - \alpha)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

■

Finalizamos nosso estudo de trigonometria deduzindo as fórmulas de **transformação em produto**, conforme ensina a seguinte

Proposição 7.22. Para todos os $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

(a) $\operatorname{sen} a \pm \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a \pm b}{2}\right) \cos \left(\frac{a \mp b}{2}\right)$.

(b) $\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2}\right) \cos \left(\frac{a-b}{2}\right)$.

(c) $\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2}\right)$.

(d) $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b}$.

Prova. Façamos a dedução das fórmulas de transformação em produto para $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$ e $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$, sendo a dedução das demais totalmente análogas (cf. problema 10, página 319).

Fazendo $x = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{a-b}{2}$, temos $a = x + y$ e $b = x - y$, de maneira que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) \\ &= (\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x) + (\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x) \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos y, \end{aligned}$$

conforme desejado.

Para o que falta, basta ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b &= \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos a \cos b}. \end{aligned}$$

■

Problemas – Seção 7.2

1. * Prove as fórmulas da proposição 7.18 para os desenvolvimentos de $\operatorname{sen}(a-b)$ e $\operatorname{tg}(a-b)$.

2. * Calcule o seno, o cosseno e a tangente de $15°$.

3. * Para $a \in \mathbb{R}$, prove que

$$\cos 2a = \begin{cases} 2\cos^2 a - 1 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \end{cases}.$$

4. Use as fórmulas do corolário 7.19 e do problema anterior para calcular o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo de $22°30'$.

5. * Em cada um dos casos a seguir, resolva as equações dadas para $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\operatorname{sen} x = 0$.

   (b) $\cos x = 0$.

   (c) $\operatorname{tg} x = 0$.

6. * Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ resolva, em cada um dos casos a seguir, as equações dadas para $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$.

   (b) $\cos x = \cos \alpha$.

   (c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$.

7. * Em cada um dos casos a seguir, resolva as equações dadas para $x \in \mathbb{R}$, quando $A = -\frac{1}{2}$, $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $A = -1$:

   (a) $\operatorname{sen} x = A$.

   (b) $\cos x = A$.

8. Resolva a equação $\operatorname{tg} x = A$ quando $A = \sqrt{3}$ e $A = 1$.

9. Calcule $\operatorname{sen}(x-y)$ em função de $a = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ e $b = \cos x + \cos y$, sabendo que $ab \neq 0$.

10. Obtenha as demais fórmulas de transformação em produto listadas na proposição 7.22.

11. Prove que, para todo x real, tem-se $\cos(\cos x) > 0$.

12. Prove que, para todo x real, tem-se $\cos(\operatorname{sen} x) > \operatorname{sen}(\cos x)$.

13. * Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 2k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(a + kb) = \frac{\operatorname{sen}\left(a + \frac{nb}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{(n+1)b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{b}{2}}$$

e

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb) = \frac{\cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{(n+1)b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{b}{2}}.$$

14. * Para $k \in \mathbb{N}$, conclua, a partir do problema anterior, que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{n} = 0.$$

7.3 As leis dos senos e dos cossenos

O propósito principal desta seção é viabilizar a utilidade geométrica dos arcos trigonométricos. Comecemos explicando como os mesmos podem ser relacionados de maneira simples à geometria de triângulos retângulos.

Sendo θ ainda como acima, i.e., de medida $0° < \theta < 90°$, o arco correspondente c é tal que $0 < c < \frac{\pi}{2}$, de maneira que $\operatorname{sen}\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ e $\operatorname{tg}\theta > 0$. Consideremos um triângulo ABC, retângulo

em A e tal que $A\widehat{B}C = \theta$ (cf. figura 7.17). Usando o ponto B como origem, considere o sistema Cartesiano tal que a semirreta $\overrightarrow{AB}$ seja o semieixo positivo das abscissas e o lado AC do triângulo fique situado no primeiro quadrante. Em seguida, trace o círculo de centro B e raio 1 e marque sua interseção P com a hipotenusa BC de ABC (ou seu prolongamento). Sendo Q o pé da perpendicular baixada de P ao eixo das abscissas, é claro que $BPQ \sim BCA$. Portanto,

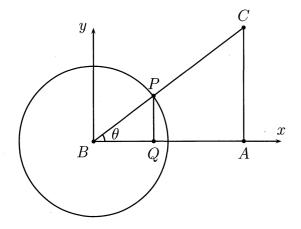



Figura 7.17: seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{BQ}}, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{BP}}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{QB}}.$$

Mas, como

$$\overline{PQ} = \operatorname{sen}\theta, \quad \text{e} \quad \overline{QB} = \cos\theta,$$

as relações acima nos dão

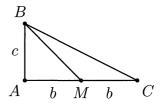
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \cos\theta, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \operatorname{tg}\theta.$$

Em resumo, para um triângulo ABC, retângulo em A e tal que $A\widehat{B}C = \theta$, temos:

$$\begin{gathered} \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}, \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}. \end{gathered} \tag{7.11}$$

Exemplo 7.23. Se ABC é um triângulo retângulo em A e M é o ponto médio do cateto AC, prove que

$$\operatorname{tg} M\widehat{B}C \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Prova. Sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = 2b$, $M\widehat{B}A = \alpha$ e $M\widehat{B}C = \beta$.

A partir de

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

obtemos

$$\frac{2b}{c} = \frac{\frac{b}{c} + \operatorname{tg}\beta}{1 - \frac{b}{c} \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

e, daí, $\operatorname{tg}\beta = \frac{bc}{2b^2+c^2}$. Mas, como $2b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{2}bc$, segue que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{bc}{2b^2 + c^2} \leq \frac{bc}{2\sqrt{2}bc} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

■

A fórmula (7.12) a seguir generaliza o teorema de Pitágoras para triângulos retângulos e é conhecida como a **lei dos cossenos**.

Proposição 7.24. Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \qquad (7.12)$$

Prova. Seja H o pé da altura relativa ao lado AC e h seu comprimento. Consideremos separadamente os casos $\widehat{A} < 90°$, $\widehat{A} = 90°$ e $\widehat{A} > 90°$:

(a) $\widehat{A} < 90°$: neste caso (cf. figura 7.18), os pontos H e C estão numa mesma semirreta dentre as determinadas sobre $\overleftrightarrow{AC}$ pelo vértice A, e (7.11) nos dá

$$\overline{AH} = c\cos\widehat{A} \quad \text{e} \quad h = c\,\text{sen}\,\widehat{A}.$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo BCH,

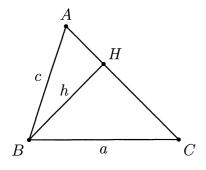



Figura 7.18: a lei dos cossenos: o caso $\widehat{A} < 90°$.

obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \overline{CH}^2 = h^2 + (b - \overline{AH})^2 \\ &= (c\,\text{sen}\,\widehat{A})^2 + (b - c\cos\widehat{A})^2 \\ &= b^2 + c^2(\text{sen}^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A}) - 2bc\cos\widehat{A} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos a relação fundamental (7.4).

(b) $\widehat{A} = 90°$: neste caso, $\cos\widehat{A} = 0$ e segue do teorema de Pitágoras (cf. figura 7.19) que

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

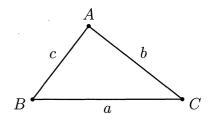



Figura 7.19: a lei dos cossenos: o caso $\widehat{A} = 90°$.

(c) $\widehat{A} > 90°$: neste caso (cf. figura 7.20), o vértice A pertence ao segmento CH. Como $B\widehat{A}H = 180° - \widehat{A}$, aplicando (7.11) ao triângulo BHA e utilizando (7.9), obtemos

$$\overline{AH} = c\cos(180° - \widehat{A}) = -c\cos\widehat{A} \quad \text{e} \quad h = c\,\text{sen}\,(180° - \widehat{A}) = c\,\text{sen}\,\widehat{A}.$$

Aplicando novamente o teorema de Pitágoras ao triângulo BCH e prosseguindo como em (a), obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \overline{CH}^2 = h^2 + (b + \overline{AH})^2 \\ &= (c\,\text{sen}\,\widehat{A})^2 + (b - c\cos\widehat{A})^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

■

No que segue, colecionamos três consequências importantes da lei dos cossenos.

Corolário 7.25. Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com $a > b > c$, então:

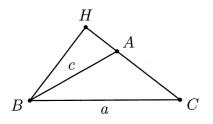



Figura 7.20: a lei dos cossenos: caso $\widehat{A} > 90°$.

(a) ABC é retângulo (em A) $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

(b) ABC é acutângulo $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$.

(c) ABC é obtusângulo (em A) $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$.

Prova. Já provamos o item (a) na seção 4.2. Para provar (b), segue da lei dos cossenos que

$$\begin{aligned} a^2 < b^2 + c^2 &\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2 \\ &\Leftrightarrow -2bc\cos A < 0 \Leftrightarrow \cos A > 0 \\ &\Leftrightarrow \widehat{A} < 90°. \end{aligned}$$

Por outro lado, $a > b > c$ implica em $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$, de modo que ABC é acutângulo. Por fim,

$$\begin{aligned} a^2 > b^2 + c^2 &\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A > b^2 + c^2 \\ &\Leftrightarrow -2bc\cos A > 0 \Leftrightarrow \cos A < 0 \\ &\Leftrightarrow \widehat{A} > 90°. \end{aligned}$$

■

A fórmula (7.13) a seguir é conhecida como a **relação de Stewart**.

Proposição 7.26. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$. Se P é um ponto sobre o lado BC, tal que $\overline{BP} = x$, $\overline{CP} = y$ e $\overline{AP} = z$, então

$$b^2x + c^2y = a(xy + z^2). \tag{7.13}$$

Prova. Se $A\widehat{P}C = \theta$, então $A\widehat{P}B = 180° - \theta$ (cf. figura 7.21). Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo APC para calcular $\overline{AC} = b$,

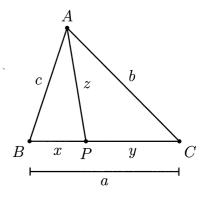



Figura 7.21: a relação de Stewart.

obtemos

$$b^2 = z^2 + y^2 - 2yz\cos\theta.$$

Por outro lado, usando que $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ e aplicando a lei dos cossenos ao triângulo APB para calcular $\overline{AB} = c$, obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= z^2 + x^2 - 2xz\cos(180° - \theta) \\ &= z^2 + x^2 + 2xz\cos\theta. \end{aligned}$$

Isolando $\cos\theta$ nas duas relações acima e igualando os resultados, chegamos à relação

$$\frac{z^2 + y^2 - b^2}{2yz} = \frac{c^2 - z^2 - x^2}{2xz}$$

ou, ainda, a
$$x(z^2+y^2-b^2)=y(c^2-z^2-x^2).$$

Podemos reescrever a relação acima como

$$xz^2+yz^2+xy^2+x^2y=b^2x+c^2y,$$

após o quê um fácil agrupamento de termos nos dá

$$(x+y)z^2+xy(x+y)=b^2x+c^2y.$$

Por fim, substituindo $x+y=a$ chegamos ao resultado desejado. ∎

O resultado a seguir já apareceu no problema 5, página 270.

Corolário 7.27. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$. Se m_a é o comprimento da mediana relativa ao lado BC, então
$$a^2+4m_a^2=2(b^2+c^2). \tag{7.14}$$

Prova. Fazendo, na relação de Stewart (veja a figura 7.21), $z=m_a$ e $x=y=\frac{a}{2}$, obtemos

$$b^2\cdot\frac{a}{2}+c^2\cdot\frac{a}{2}=a\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+m_a^2\right)$$

ou, ainda,
$$\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{a^2}{4}+m_a^2,$$

conforme procurado. ∎

A outra relação fundamental para nossos propósitos é a **lei dos senos**, fórmula (7.15) a seguir.

Proposição 7.28. Se R é o raio do círculo circunscrito a um triângulo de lados a, b e c, então

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2R. \tag{7.15}$$

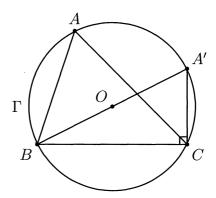



Figura 7.22: a lei dos senos.

Prova. Seja ABC um triângulo como no enunciado, com $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{BC}=a$ (cf. figura 7.22). Supondo ABC acutângulo (a consideração dos demais casos é totalmente análoga), provaremos que $\operatorname{sen}\widehat{A}=\frac{a}{2R}$ (as igualdades $\operatorname{sen}\widehat{B}=\frac{b}{2R}$ e $\operatorname{sen}\widehat{C}=\frac{c}{2R}$ também podem ser provadas de modo análogo).

Seja O o centro do círculo Γ, circunscrito a ABC, e A' o simétrico de B em relação a O. Então $A'\in\Gamma$, de modo que o teorema do ângulo inscrito nos dá $B\widehat{A'}C=B\widehat{A}C=\widehat{A}$. Por outro lado, como BA' é diâmetro de Γ, temos $A'\widehat{C}B=90^\circ$. Então, no triângulo retângulo $BA'C$, temos
$$\operatorname{sen}\widehat{A}=\operatorname{sen}B\widehat{A'}C=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}=\frac{a}{2R}.$$

∎

O corolário a seguir é, muito provavelmente, a mais importante consequência da lei dos senos. A fórmula dada pela primeira igualdade em (7.16) é conhecida como a **fórmula do seno** para a área de um triângulo.

Corolário 7.29. Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e raio do círculo circunscrito igual a R, então

$$A(ABC) = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{abc}{4R}. \tag{7.16}$$

Prova. Suponha que ABC é acutângulo (a demonstração nos demais casos é inteiramente análoga) e sejam H_b o pé da altura relativa ao lado AC e h_b seu comprimento (cf. figura 7.23). Então, no triângulo

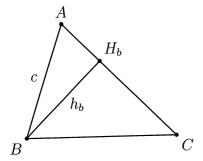



Figura 7.23: fórmulas para a área de um triângulo.

retângulo ABH_b, temos

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{\overline{BH_b}}{\overline{AB}} = \frac{h_b}{c}$$

ou, ainda, $h_b = c \operatorname{sen} \widehat{A}$. Segue, daí, que

$$A(ABC) = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \widehat{A}.$$

Por fim, para obter a outra fórmula em (7.16), basta aplicar a lei dos senos à primeira fórmula:

$$A(ABC) = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

■

Outra expressão muito útil para a área de um triângulo é a **fórmula de Herão**, devida ao matemático grego Herão de Alexandria, do século I d.C., e objeto da proposição a seguir.

Proposição 7.30. Se ABC é um triângulo de lados a, b e c e semiperímetro p, então

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{7.17}$$

Prova. Aplicando sucessivamente a fórmula do seno para a área de ABC, a relação fundamental da trigonometria e a lei dos cossenos, obtemos

$$\begin{aligned} 16A(ABC)^2 &= 4b^2c^2 \operatorname{sen}^2 \widehat{A} = 4b^2c^2(1 - \cos^2 \widehat{A}) \\ &= 4b^2c^2 \left\{ 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Então, utilizando sucessivas vezes a fórmula para a fatoração de uma diferença de quadrados, obtemos

$$\begin{aligned} 16A(ABC)^2 &= 4b^2c^2 \left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) \\ &= \left(2bc - (b^2+c^2) + a^2 \right) \left(2bc + (b^2+c^2) - a^2 \right) \\ &= \left(a^2 - (b-c)^2 \right) \left((b+c)^2 - a^2 \right) \\ &= (a - (b-c))\,(a + (b-c))\,((b+c) - a)\,((b+c) + a) \\ &= 2(p-b) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-a) \cdot 2p \\ &= 16p(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

■

Como aplicação da fórmula de Herão, no exemplo a seguir resolvemos o **problema isoperimétrico** para triângulos.

Exemplo 7.31. Mostre que, dentre todos os triângulos com um mesmo perímetro, o de maior área é o equilátero.

Prova. Sejam p o perímetro (conhecido), A a área e a, b e c os comprimentos dos lados do triângulo em questão. Utilizando a fórmula de Herão em conjunção com a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para três números reais positivos (cf. exemplo 7.7 do volume 1), obtemos

$$\frac{A^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27},$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $p-a = p-b = p-c$, i.e., se, e só se, o triângulo for equilátero. ■

Problemas – Seção 7.3

1. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1 e E um ponto sobre o lado CD, tal que $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CE}$. Sendo F o ponto médio do lado CD, prove que $E\widehat{A}B = 2 \cdot F\widehat{A}D$.

2. Duas retas paralelas r e s distam 5cm uma da outra. Entre elas está marcado um ponto P, que dista 1cm de r. Pontos A e B são escolhidos respectivamente sobre r e s, de modo que $\angle APB = 90°$. Calcule o comprimento de AP para que a área de APB seja a maior possível.

3. (OCM.) ABC é um triângulo retângulo em A e tal que $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = 3$. Pontos D e E são marcados sobre o lado AC, tais que $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EC}$. Prove que $A\widehat{D}B + A\widehat{E}B = 45°$.

4. (OCM.) De um triângulo ABC conhecemos as medidas b e c dos lados AC e AB, respectivamente. Sabendo que AB mede $\sqrt{b^2+c^2+bc}$, calcule a medida, em graus, do ângulo $\angle ACB$.

5. * Para um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio R, sejam l_n e a_n respectivamente os comprimentos dos lados e as distâncias do centro do círculo circunscrito aos lados do polígono (dizemos que a_n é o **apótema** do polígono). Calcule l_n e a_n para $n = 3$, 4, 6 e 8.

6. No interior de um polígono regular de n lados de comprimento l, estão situados n círculos, todos de raio r, cada uma tangente a dois círculos vizinhos e a dois lados consecutivos do polígono. Calcule, em função de l e de n, o valor de r.

7. * Faça os itens a seguir:

   (a) Nas notações do problema 7, prove que $l_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

   (b) Calcule l_5 em função de R.

   (c) Prove que existe um triângulo de lados l_5, l_6 e l_{10} e que tal triângulo é necessariamente retângulo.

8. * Use o problema anterior para mostrar que $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

9. (Eslovênia.) Os três mosqueteiros, Athos, Porthos e Aramis, discutiram certo dia numa taverna. Após a briga, cada um seguiu seu caminho, em direções que formavam 120° uma com a outra. Suas velocidades eram 10km/h, 20km/h e 40km/h, respectivamente. Prove que, em qualquer instante após a briga, as posições dos três mosqueteiros formavam os vértices de um triângulo retângulo.

10. (OIM.) ABC é um triângulo equilátero de lado ℓ. O ponto P em seu interior é tal que PA, PB e PC são os lados de um triângulo retângulo de ângulos agudos iguais a 30° e 60°, do qual PA é o comprimento da hipotenusa. Calcule $\overline{PA}$.

11. Um hexágono convexo tem três lados consecutivos medindo a e os outros três medindo b. Sabendo que tal hexágono está inscrito em um círculo de raio r, pede-se:

    (a) Calcular r em função de a e b.

    (b) Calcular a área do hexágono em função de a e b.

12. Prove a fórmula para o cálculo da mediana de Euler de um quadrilátero convexo (cf. problema 6, página 270) a partir de (7.14).

13. Prove que, em todo paralelogramo, a soma dos quadrados dos lados é igual à soma dos quadrados das diagonais e, em seguida, use esse fato para deduzir a fórmula (7.14) para o comprimento de uma mediana de um triângulo.

14. Traçamos o círculo Γ de centro O circunscrito a um triângulo ABC, retângulo A e de catetos 3cm e 4cm. Encontre o raio do círculo Σ de centro O', tangente aos catetos de ABC e interiormente a Γ.

15. Os lados de um triângulo ABC medem a, b e c. Sendo p o semiperímetro do triângulo e R o raio do círculo circunscrito, prove que
$$\operatorname{sen}\widehat{A} + \operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{p}{R}.$$

16. (OCM.) Seja ABC um triângulo tal que $A\widehat{B}C = 2A\widehat{C}B$. Mostre que $b^2 = c(a+c)$.

17. Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética, o lado intermediário medindo ℓ. Sabendo que o ângulo maior excede o menor em $90°$, calcule a razão entre os comprimentos do maior e do menor dos lados do triângulo.

18. Construa com régua e compasso o triângulo ABC, conhecendo os comprimentos b do lado AC, c do lado AB e sabendo que a mediana relativa ao lado BC divide o ângulo $\angle BAC$ em dois ângulos tais que a medida de um é o dobro da medida do outro.

19. Um triângulo ABC é tal que $\overline{AB} = 13$cm, $\overline{AC} = 14$cm e $\overline{BC} = 15$cm. Um semicírculo de raio R tem seu centro O sobre o lado BC e tangencia os lados AB e AC do triângulo. Calcule o valor do raio R.

20. Seja ABC um triângulo de lados 4cm, 5cm e 6cm. Escolhemos um ponto D sobre um dos lados de ABC e, em seguida, baixamos perpendiculares DP e DQ aos outros dois lados de ABC. Calcule o menor comprimento possível do segmento PQ.

21. * (IMO – adaptado.) Se ABC é um triângulo de lados a, b e c, prove a **desigualdade de Weitzenböck**[1]:
$$A(ABC) \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2),$$
com igualdade se, e só se, ABC for equilátero.

22. Dados um polígono regular $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ e um ponto qualquer P do plano, prove que
$$\sum_{k=1}^{n} \overline{A_{2k}P}^2 = \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{2k-1}P}^2.$$

23. (Polônia.) Seja ABC um triângulo, Γ seu círculo circunscrito e D o ponto médio do arco $\overset{\frown}{BC}$ de Γ que não contém o vértice A. Se K e L são respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de B e C à reta $\overleftrightarrow{AD}$, prove que $\overline{BK} + \overline{CL} \leq \overline{AD}$.

[1]Após Roland Weitzenböck, matemático austríaco do século XX.

24. (OIM.) A partir de um triângulo ABC, construímos um hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ do seguinte modo:

   (a) $A \in BB_2, CC_1$, $B \in AA_1, CC_2$ e $C \in AA_2, BB_1$.

   (b) $\overline{AB_2} = \overline{AC_1} = \overline{BC}$, $\overline{BA_1} = \overline{BC_2} = \overline{AC}$ e $\overline{CA_2} = \overline{CB_1} = \overline{AB}$.

   Prove que
$$A(A_1A_2B_1B_2C_1C_2) \geq 13 \cdot A(ABC).$$

25. Prove o *teorema de Arquimedes* (cf. problema 28, página 124) com o auxílio da teoria desenvolvida neste capítulo até aqui: seja ABC um triângulo tal que $AB > AC$. Sobre o círculo circunscrito a ABC marcamos o ponto médio M do arco $\overset{\frown}{BC}$ que contém o vértice A. Se N é o pé da perpendicular baixada desde M ao segmento AB, então $\overline{BN} = \overline{AN} + \overline{AC}$.

26. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $B\widehat{A}C = 2\alpha$. Sendo P o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A, prove que
$$\overline{AP} = \frac{2bc\cos\alpha}{b+c}.$$

27. (Canadá.) Seja ABC um triângulo tal que os lados BC e AC medem respectivamente a e b. Sabendo que a área desse triângulo é dada por $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, calcule a medida do ângulo $\angle ACB$.

28. * Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo de diagonais AC e BD, que formam entre si um ângulo α. Mostre que
$$A(ABCD) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD} \operatorname{sen}\alpha.$$
   A fórmula acima é a **fórmula do seno** para a área de um quadrilátero.

29. Em um quadrilátero convexo $ABCD$, seja E o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Se $A(ABE) = S_1$, $A(CDE) = S_2$ e $A(ABCD) = S$, prove que
$$\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}.$$
   Discuta quando ocorre a igualdade.

30. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo inscritível e M um ponto sobre o lado CD, tal que o perímetro e a área do triângulo ADM e do quadrilátero $ABCM$ são iguais. Prove que $ABCD$ tem dois lados de comprimentos iguais.

31. (Bielorrússia.) Seja $ABCD$ um trapézio de área 18cm^2 e soma das diagonais 12cm. Mostre que as diagonais são perpendiculares e iguais.

32. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de lados a, b, c, d. Prove a **fórmula de Bramagupta**[2] para a área de $ABCD$:
$$A(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

33. Prove o **teorema de Hiparco**[3]: seja $ABCD$ um quadrilátero convexo de lados $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, e diagonais $\overline{AC} = x$ e $\overline{BD} = y$. Se $ABCD$ for inscritível, então
$$\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

34. (IMO.) Construa, com régua e compasso, um quadrilátero inscritível $ABCD$, conhecidos os comprimentos a, b, c e d dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente.

[2]Após Bramagupta, matemático e astrônomo indu do século VII d.C..
[3]Após Hiparco de Nicéia, matemático e astrônomo grego do século II d.C..

35. (Rússia). Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e medianas relativas a AB, AC e BC de comprimentos respectivamente iguais a m_c, m_b e m_a. Se R é o raio do círculo circunscrito a ABC, prove que

$$\frac{a^2+b^2}{2m_c} + \frac{a^2+c^2}{2m_b} + \frac{b^2+c^2}{2m_a} \leq 6R,$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, ABC for equilátero.

36. (União Soviética.) Dado um polígono convexo no plano, podemos traçar uma reta que o divida em exatamente dois outros polígonos convexos, escolher um de tais polígonos, *emborcá-lo* e colá-lo de volta ao primeiro, ao longo do corte inicial. Pergunta-se: existe uma sequência finita de tais operações que transforme um quadrado em um triângulo?

37. * São dados um triângulo ABC e cevianas AP, BQ e CR, com $P \in BC$, $Q \in AC$ e $R \in AB$. Se $B\widehat{A}P = \alpha$, $C\widehat{A}P = \alpha'$, $C\widehat{B}Q = \beta$, $A\widehat{B}Q = \beta'$, $A\widehat{C}R = \gamma$ e $B\widehat{C}R = \gamma'$, $\overline{AB} = c$, prove que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\alpha' \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}}$$

(valendo relações análogas para as razões em que Q divide AC e R divide AB). A partir daí, deduza a seguinte *versão trigonométrica* do teorema de Ceva:

$$AP,\ BQ \text{ e } CR \text{ concorrem} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha'} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\beta'} \cdot \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\gamma'} = 1.$$

Por fim, use tal versão trigonométrica para dar uma prova alternativa do teorema 4.27.

38. Seja ABC um triângulo acutângulo de incentro I. Marque o ponto $A_1 \in \overrightarrow{AI}$ tal que $A_1 \neq A$ e o ponto médio M de AA_1 esteja sobre o círculo circunscrito a ABC; em seguida, defina $N \in \overrightarrow{BI}$ e $P \in \overrightarrow{CI}$ de forma análoga.

    (a) Prove que $A(A_1B_1C_1) = (4R + r)p$, onde r e R denotam respectivamente os raios dos círculos inscrito e circunscrito a ABC, e p denota o semiperímetro de tal triângulo.

    (b) Conclua que $A(A_1B_1C_1) \geq 9 \cdot A(ABC)$, com igualdade se, e só se, ABC for equilátero.

7.4 A desigualdade de Ptolomeu

Para o que segue, relembremos a discussão no parágrafo anterior ao teorema de Simson-Wallace (cf. proposição 3.41): dados no plano um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre qualquer das retas suportes dos lados de ABC, o **triângulo pedal** de P em relação a ABC é o triângulo que tem por vértices os pés das perpendiculares baixadas de P às retas suportes dos lados de ABC.

A proposição mencionada acima garante que o triângulo DEF é degenerado se, e só se, P pertence ao círculo circunscrito a ABC. Em todo caso, a proposição a seguir nos ensina a calcular os comprimentos dos lados de DEF.

Proposição 7.32. São dados no plano um triângulo ABC e um ponto P, não situado sobre qualquer das retas suportes dos lados de ABC. Se DEF é o triângulo pedal de P em relação a ABC, com $D \in \overleftrightarrow{BC}$, $E \in \overleftrightarrow{AC}$ e $F \in \overleftrightarrow{AB}$, então

$$\overline{DE} = \overline{PC} \cdot \operatorname{sen}\widehat{C}, \quad \overline{EF} = \overline{PA} \cdot \operatorname{sen}\widehat{A} \quad \text{e} \quad \overline{FD} = \overline{PB} \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}. \qquad (7.18)$$

Prova. Há três casos essencialmente distintos a considerar: P está no interior do triângulo ABC; P está na região angular $\angle ABC$ mas é exterior ao triângulo; P está na região angular oposta pelo vértice

em relação à região angular $\angle ABC$. Analisemos o primeiro caso (cf. figura 3.36), sendo a análise dos demais casos essencialmente a mesma.

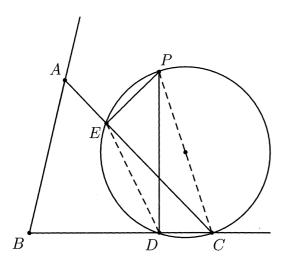



Figura 7.24: lados de triângulos pedais.

Basta mostrarmos que $\overline{DE} = \overline{PC} \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}$ (as demais igualdades podem ser obtidas de maneira análoga). Como $P\widehat{E}C = P\widehat{D}C = 90°$, o quadrilátero $PEDC$ é inscritível e seu círculo circunscrito tem diâmetro PC. Portanto, aplicando a lei dos senos ao triângulo DEC, obtemos

$$\frac{\overline{DE}}{\operatorname{sen} E\widehat{C}D} = \overline{PC}.$$

Mas, como $\angle ECD = \angle ACB = \angle C$, obtemos o resultado desejado. ■

Com o auxílio da proposição acima e do teorema de Simson-Wallace (cf. proposição 3.41), podemos generalizar o teorema de Ptolomeu 4.17 conforme descrito a seguir.

Teorema 7.33. Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo de diagonais AC e BD, então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}, \tag{7.19}$$

ocorrendo a igualdade se e só se $ABCD$ for inscritível.

Prova. Sejam novamente X, Y e Z os pés das perpendiculares baixadas de D respectivamente às retas suportes dos segmentos BC, AC e AB (cf. figura 7.25). Como na prova do teorema de Simson-Wallace, podemos supor, sem perda de generalidade, que X e Y estão sobre os segmentos BC e AC, respectivamente, mas que Z está sobre o prolongamento do lado AB.

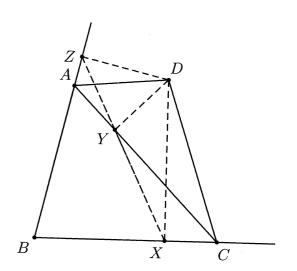



Figura 7.25: generalizando o teorema de Ptolomeu.

Segue da proposição 7.32 que

$$\frac{\overline{XY}}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \overline{CD};$$

por outro lado, a lei dos senos aplicada ao triângulo ABC fornece

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito a ABC. Portanto, temos, a partir das duas relações acima, que

$$\overline{XY} = \overline{CD} \cdot \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{2R}.$$

Analogamente, obtemos

$$\overline{YZ} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{2R} \quad \text{e} \quad \overline{XZ} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2R}.$$

Por fim que, pelo teorema 3.41, temos

$$\begin{aligned} ABCD \text{ inscritível} &\Leftrightarrow X, Y \text{ e } Z \text{ colineares} \\ &\Leftrightarrow \overline{XY} + \overline{YZ} = \overline{XZ}. \end{aligned}$$

Como, em qualquer caso, temos pela desigualdade triangular que $\overline{XY} + \overline{YZ} \geq \overline{XZ}$, segue das expressões acima obtidas para $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$ e $\overline{YZ}$ que

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2R} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{2R} \geq \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2R},$$

com igualdade se, e só se, $ABCD$ for inscritível. ■

Dado no plano um triângulo ABC, o **problema de Steiner**[4] para ABC pede encontrar o(s) ponto(s) P em seu interior tal(is) que a soma

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$$

seja a menor possível. No que segue, utilizamos a versão geral do teorema de Ptolomeu para resolver tal problema para uma certa classe de triângulos.

[4]Após Jakob Steiner, matemático suiço do século XIX.

Figura 7.26: Jakob Steiner, matemático suiço do século XIX. Steiner contribuiu em muito para o desenvolvimento da geometria projetiva e inversiva, tendo estudado, dentre outros problemas, aquele que ficou conhecido como o das *cadeias de Steiner*. Um exemplo de cadeia de Steiner é o logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática, o qual pode ser visto em www.obm.org.br ou no clássico [6].

Para o enunciado do resultado a seguir, recorde-se de que (cf. problema 6, página 185), se ABC é um triângulo cujos ângulos internos são todos menores que 120°, seu *ponto de Fermat* é o único ponto P no interior de ABC tal que

$$A\widehat{P}B = A\widehat{P}C = B\widehat{P}C = 120^\circ.$$

Teorema 7.34 (Steiner). Se ABC é um triângulo cujos ângulos internos são todos menores que 120°, então o ponto de Fermat de ABC é o único ponto do plano que resolve o problema de Steiner para ABC.

Prova. Observemos, inicialmente, que a construção do problema 6, página 185 (cf. figura 7.27), garante que, se P é o ponto de interseção dos círculos circunscritos aos triângulos equiláteros ACE, BCD e ABF, então

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}. \tag{7.20}$$

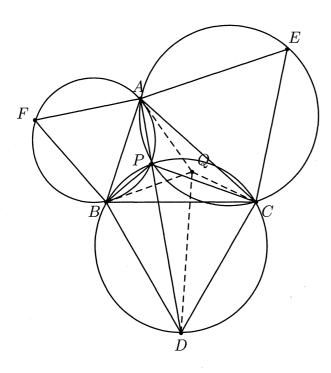



Figura 7.27: o problema de Steiner.

Por outro lado, se $Q \neq P$ for outro ponto interior a ABC, então Q não pode estar sobre os três círculos mencionados acima (senão Q coincidiria com P). Suponha, sem perda de generalidade, que Q não está sobre o círculo circunscrito a BCD. Então, a desigualdade de Ptolomeu (7.19) aplicada ao quadrilátero $QBDC$ (que não é inscritível) nos dá

$$\overline{BQ} \cdot \overline{CD} + \overline{CQ} \cdot \overline{BD} > \overline{DQ} \cdot \overline{BC}.$$

Mas, como $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$, segue que

$$\overline{BQ} + \overline{CQ} > \overline{DQ}.$$

Por fim, basta usar a desigualdade triangular e (7.20):

$$\overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ} > \overline{AQ} + \overline{DQ} \geq \overline{AD} = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP},$$

e o ponto solução do problema de Steiner existe e é o ponto de Fermat P do triângulo ABC. ■

Problemas – Seção 7.4

1. (Vietnã.) Encontre o menor valor possível para a expressão

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} +$$
$$+ \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2},$$

quando x e y variam no conjunto dos números reais.

CAPÍTULO 8

Vetores no Plano

Este capítulo final é dedicado ao estudo sistemático de vetores no plano, bem como à apresentação de algumas aplicações dos mesmos à geometria. Tentamos enfatizar o uso de vetores como sendo, ao mesmo tempo, alternativo e complementar aos métodos sintético e Cartesiano e, nesse sentido, o leitor verá que vários resultados difíceis, obtidos anteriormente por um de tais métodos, serão reobtidos aqui, mais facilmente, por meio do uso de vetores. Particularmente, chamamos a atenção do leitor para a variedade de usos do conceito de *produto escalar de dois vetores*, apresentado na seção 8.3.

8.1 Vetores geométricos

Um **vetor geométrico**, ou simplesmente um **vetor**, no plano é um *segmento orientado*, i.e., um segmento tal que, dentre suas extremidades, uma é a **inicial** e a outra é a **final** (cf. figura 8.1). Dizemos,

ainda, que vetores são segmentos munidos de um *sentido* (de percurso).

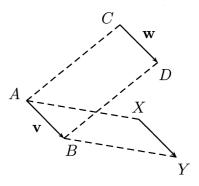



Figura 8.1: Vetores no plano.

Representamos vetores em geral por letras latinas minúsculas em negrito. Se um vetor $\mathbf{v}$ (cf. figura 8.1) tem extremidades inicial A e final B, escrevemos também $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. Observe que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são distintos: apesar de terem as mesmas extremidades, $\overrightarrow{BA}$ tem sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$.

Em que pese sua definição, o conceito de igualdade para vetores é mais *frouxo* que o conceito geral de igualdade de segmentos: dizemos que dois vetores $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{CD}$ são **iguais** se o quadrilátero $ACDB$ (com vértices percorridos nessa ordem) for um paralelogramo (cf. figura 8.1). Nesse caso, dizemos ainda que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são **representantes** do mesmo vetor e escrevemos $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ou, ainda, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Um mesmo vetor tem uma infinidade de representantes: dado um vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ e fixado um ponto arbitrário X, se Y é o ponto tal que $AXYB$ é um paralelogramo, então $\overrightarrow{XY}$ é outro representante de $\mathbf{v}$.

O **módulo** do vetor $\mathbf{v}$, denotado $||\mathbf{v}||$ é o comprimento de um qualquer de seus representantes. Por exemplo, se $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, então

$||\mathbf{v}|| = \overline{AB}$ (cf. figura 8.2).

Para o que segue, é útil estender as definições acima e considerar um ponto qualquer do plano também como um vetor, denominado o **vetor nulo** e denotado $\mathbf{0}$ (veja que tal convenção equivale a considerarmos um ponto como um segmento de comprimento zero). Assim, $||\mathbf{0}|| = 0$. Um vetor **não nulo** é um vetor $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Dado um vetor não nulo $\mathbf{v}$, definimos a **direção** de $\mathbf{v}$ como sendo o conjunto das retas (paralelas) que contêm seus representantes. Em particular, dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ têm *mesma direção* (cf. figura 8.2) se, escolhidos representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ respectivamente para $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, tivermos $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

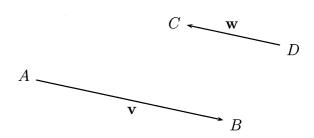



Figura 8.2: Módulo e direção de vetores.

Uma das grandes vantagens de trabalharmos com vetores é a possibilidade de realizar com eles *operações* semelhantes à adição e à subtração de números reais. Especificamente, dados vetores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (cf. figura 8.3), escolha representantes $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$ (i.e., tais que a extremidade final de $\mathbf{v}$ coincida com a extremidade inicial de $\mathbf{w}$) e defina a **soma** de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ como o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$. Defina também $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ para todo vetor $\mathbf{v}$ (nulo ou não).

Se os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ têm direções distintas (como é o caso na

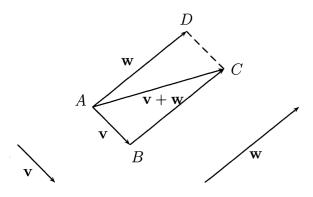



Figura 8.3: Adição de vetores.

figura 8.3), também podemos calcular sua soma utilizando a **regra do paralelogramo**: escolhemos um representante $\overrightarrow{AD}$ para $\mathbf{w}$ (de mesma extremidade inicial que $\mathbf{v}$) e observamos que a soma $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ é o vetor-diagonal $\overrightarrow{AC}$ do paralelogramo $ABCD$.

É imediato verificar (cf. problema 1) que a adição de vetores está *bem definida*, i.e., que a soma $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ independe dos representantes escolhidos para os vetores-parcela $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Ademais, a regra do paralelogramo deixa claro que a adição de vetores é **comutativa**, i.e., que

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v},$$

para todos os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Outra propriedade importante da adição de vetores é sua **associatividade**, estabelecida na proposição a seguir.

Proposição 8.1. Dados vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, temos

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

Prova. Suponha, por conveniência, que já escolhemos representantes para $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ da forma $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ (cf. figura 8.4).

Marque sucessivamente os pontos D e E, tais que $OADB$ e $ODEC$

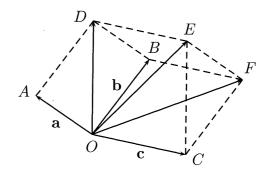



Figura 8.4: Associatividade da adição de vetores.

sejam paralelogramos. Então $\overrightarrow{OD}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ e segue, daí, que

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}.$$

Marque, agora, o ponto F, tal que $OBFC$ também seja um paralelogramo. Então, por um lado, $\overrightarrow{OF}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$; por outro, segue do fato de $ODEC$ e $OBFC$ serem paralelogramos que os segmentos BF e DE são ambos paralelos e iguais aos segmento OC. Portanto, o quadrilátero $DEFB$ também é um paralelogramo, uma vez que seus lados DE e BF são iguais e paralelos. Em particular, como vetores temos

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OA},$$

onde utilizamos, na última igualdade, o fato de $OADB$ também ser um paralelogramo. Assim, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{FE}$, de maneira que $OAEF$ também é um paralelogramo. Mas isso nos dá

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OE}.$$

■

Uma segunda operação útil com vetores é a **multiplicação por escalar** (no contexto de operações com vetores, em geral nos referiremos a um número real como um **escalar**). Assim, dados um vetor $\mathbf{v}$ e um escalar k, definimos o *produto de* $\mathbf{v}$ *pelo escalar* k ou, simplesmente, o **produto por escalar** $k\mathbf{v}$, da seguinte maneira: se $k = 0$ ou $v = \mathbf{0}$, então $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$; se $k \neq 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então $k\mathbf{v}$ (veja a figura 8.5 para um exemplo) é o único vetor satisfazendo as seguintes condições:

(*i*) $k\mathbf{v}$ tem a mesma direção de $\mathbf{v}$.

(*ii*) $||k\mathbf{v}|| = |k| \cdot ||\mathbf{v}||$.

(*iii*) $k\mathbf{v}$ tem o mesmo sentido de $\mathbf{v}$ se $k > 0$, e o sentido contrário se $k < 0$.

Dizemos também que $k\mathbf{v}$ é um **múltiplo escalar** de $\mathbf{v}$. Quando $k = -1$, o vetor $-\mathbf{v}$ é denominado o **oposto** do vetor $\mathbf{v}$.

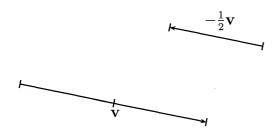



Figura 8.5: Os vetores $\mathbf{v}$ e $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$.

A operação de multiplicação por escalar goza das propriedades listadas na proposição a seguir, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor (cf. problema 3).

Proposição 8.2. Dados escalares k, k_1 e k_2 e vetores $\mathbf{v}$, $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$, temos:

(a) $(k_1k_2)\mathbf{v} = k_1(k_2\mathbf{v})$.

(b) $(k_1 + k_2)\mathbf{v} = (k_1\mathbf{v}) + (k_2\mathbf{v})$.

(c) $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (k\mathbf{v_1}) + (k\mathbf{v_2})$.

De posse da operação de multiplicação de um vetor por um escalar, podemos definir a **diferença** $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ como a soma de $\mathbf{v}$ com o oposto de $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}). \tag{8.1}$$

Em particular, é imediato que $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Uma vez que a diferença entre dois vetores é definida como um caso particular da adição, não deve se constituir surpresa que possamos obtê-la geometricamente com o auxílio da regra do paralelogramo (cf. figura 8.6): se o paralelogramo $ABCD$ é tal que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ e $\overrightarrow{BC} = \mathbf{w}$, então o vetor diagonal $\overrightarrow{AC}$ (com origem A) representa $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, ao passo que o vetor-diagonal $\overrightarrow{DB}$ representa $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

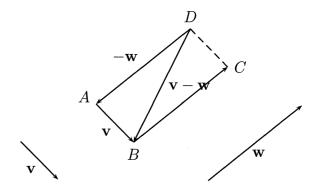



Figura 8.6: Diferença entre dois vetores.

Problemas – Seção 8.1

1. * Dados vetores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, escolha representantes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ para $\mathbf{v}$ e $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'C'}$ para $\mathbf{w}$. Se D e D' são os pontos tais que os quadriláteros $ACDB$ e $A'C'D'B'$ são paralelogramos, prove que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$.

2. * Prove que dois vetores não nulos e de mesma direção podem ser vistos um como um múltiplo escalar do outro. Mais precisamente, dados $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ vetores de mesma direção, prove que

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \frac{||v||}{||w||}\mathbf{w}, \text{ se } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w} \text{ têm mesmo sentido} \\ \mathbf{v} = -\frac{||v||}{||w||}\mathbf{w}, \text{ se } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w} \text{ têm sentidos contrários} \end{cases}.$$

3. * Prove a proposição 8.2.

4. * São dados no plano pontos distintos O, A, B e C, tais que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, para um certo $k \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\overrightarrow{OC} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}.$$

5. Dado um quadrilátero $ABCD$, sejam M, N, P e Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e AD, respectivamente. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

6. * Seja ABC um triângulo de circuncentro O e ortocentro H. Prove que

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

7. * Seja ABC um triângulo de circuncentro O e incentro I. Se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, prove que

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

8. (França.) Seja $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono regular de n lados.

   (a) Se n for par, mostre que, para todo ponto P do plano, existe uma escolha de sinais $+$ e $-$ que torna verdadeira a igualdade

$$\pm\overrightarrow{PA_1} \pm \overrightarrow{PA_2} \pm \cdots \pm \overrightarrow{PA_n} = \mathbf{0}.$$

   (b) Se n for ímpar, mostre que há somente um número finito de pontos P do plano para os quais a igualdade acima seja verdadeira para alguma escolha de sinais $+$ e $-$.

9. Seja $A_1A_2\ldots A_{2n}$ um polígono simples no plano (cf. discussão que precede o problema 11, página 271) e, para $1 \leq i \leq 2n$, seja M_i o ponto médio do lado A_iA_{i+1} (com $A_{2n+1} = A_1$). Fixado um ponto B_1 do plano, para $2 \leq i \leq 2n+1$ defina o ponto B_i como o simétrico de B_{i-1} em relação a M_{i-1}. Prove que $B_{2n+1} = B_1$.

10. (União Soviética.) Quando cada lado de um quadrilátero convexo $ABCD$ é prolongado de seu próprio comprimento, obtemos um novo quadrilátero $A'B'C'D'$, tal que B é o ponto médio de AA', C é o ponto médio de BB', D é o ponto médio de CC' e A o de DD'. Mostre como reobter o quadrilátero $ABCD$ a partir do quadrilátero $A'B'C'D'$.

11. Seja $P_1P_2P_3P_4P_5$ um pentágono convexo no plano e, para $1 \leq i \leq 5$, seja Q_i o ponto de interseção dos segmentos que unem os pontos médios dos lados opostos de $P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}$ (com $P_{i+5} = P_i$ para $1 \leq i \leq 5$). Prove que existe um ponto O no plano tal que $O \in P_iQ_i$ e $\overline{OP_i} = 4\overline{OQ_i}$, para $1 \leq i \leq 5$.

8.2 Vetores no plano Cartesiano

Se munirmos o plano de um sistema Cartesiano, é útil entender a relação entre o mesmo e as operações acima definidas para vetores. A chave para tal entendimento é o resultado auxiliar a seguir.

Lema 8.3. Se $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ e $D(x_D, y_D)$ em um dado sistema Cartesiano, então

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}. \tag{8.2}$$

Prova. Sabemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e só se, o quadrilátero $ABDC$, com os vértices percorridos nessa ordem, for um paralelogramo. Mas sabemos que tal ocorre se, e só se, as diagonais AD e BC têm um mesmo ponto médio M (cf. figura 8.7). Por outro lado, segue do corolário 6.2 que tal ocorre se, e só se, $\frac{A+D}{2} = \frac{B+C}{2}$, i.e., se, e só se,

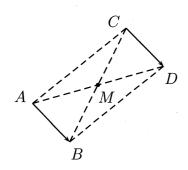



Figura 8.7: Igualdade de vetores em coordenadas.

$$x_A + x_D = x_B + x_C \text{ e } y_A + y_D = y_B + y_C.$$

■

O lema acima assegura em particular que, fixado um sistema Cartesiano xOy no plano, todo vetor $\mathbf{v}$ do mesmo admite um único representante da forma $\overrightarrow{OV}$ (cf. figura 8.8). De fato, se $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, então o lema garante que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OV}$, com $V(x_B - x_A, y_B - y_A)$; de outro modo, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$. Por outro lado, se $\overrightarrow{OV_1} = \overrightarrow{OV_2}$, para certos $V_1(x_1, y_1)$ e $V_2(x_2, y_2)$, então novamente o lema garante que

$$(x_1 - 0, y_1 - 0) = (x_2 - 0, y_2 - 0),$$

i.e., $V_1 = V_2$. Portanto, ao utilizarmos vetores há uma enorme vantagem na escolha de um sistema Cartesiano no plano: uma vez fixado um tal sistema, todo vetor passa a admitir um *representante canônico*, cuja extremidade inicial coincide com a origem do sistema Cartesiano em questão. Nesse sentido, se $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$, com $V(x, y)$, convencionamos denotar

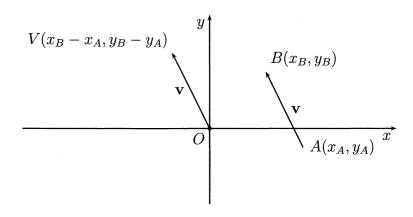



Figura 8.8: Representando vetores em planos Cartesianos.

$$\mathbf{v} = (x, y).$$

As vantagens de tal notação se tornarão claras no que segue.

Proposição 8.4. Se, em um certo sistema Cartesiano, temos $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{w} = (x_2, y_2)$, então

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

(b) $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

(c) $k\mathbf{v} = (kx_1, ky_1)$.

Prova.
(a) Denote por O a origem do sistema Cartesiano em questão e sejam $V(x_1, y_1)$, $W(x_2, y_2)$. Sendo $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{OA}$, com $A(a, b)$, temos

$$\overrightarrow{VA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OV} = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{v} = \mathbf{w} = \overrightarrow{OW}$$

e, daí, o lema 8.3 garante que $a - x_1 = x_2 - 0$ e $b - y_1 = y_2 - 0$. Portanto, temos $A(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, logo $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{OA} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

(b) A prova deste item é análoga à do item (a) e será deixada como exercício para o leitor.

(c) Analisemos o caso $k > 0$ (o caso $k \leq 0$ é análogo). Suponha, ainda, que $x_1, y_1 \neq 0$ (os casos $x_1 = 0$ ou $y_1 = 0$ também podem ser tratados de modo análogo a esse), e sejam $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ e $k\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$, com $A(a, b)$. Como $k > 0$, é claro que a e x_1 (e, do mesmo modo, b e y_1) têm um mesmo sinal. Sendo $V_x(x_1, 0)$, $V_y(0, y_1)$, $A_x(a, 0)$ e $A_y(0, b)$, temos imediatamente as semelhanças de triângulo $AA_xO \sim VV_xO$ e $AA_yO \sim VV_yO$; da primeira dessas semelhanças, obtemos

$$\frac{|a|}{|x_1|} = \frac{\overline{OA_x}}{\overline{OV_x}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OV}} = k$$

e, daí, $|a| = k|x_1|$. Mas, como a e x_1 têm um mesmo sinal, segue que $a = kx_1$. Analogamente, $b = ky_1$ e, assim,

$$k\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a, b) = (kx_1, ky_1).$$

■

A proposição acima tem uma consequência interessante e útil, que exploramos no que segue. Fixado no plano um sistema Cartesiano, denotamos

$$\mathbf{i} = (1, 0) \text{ e } \mathbf{j} = (0, 1), \qquad (8.3)$$

e dizemos que os vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ formam (nessa ordem) a **base canônica** do sistema Cartesiano em questão. Fixado então um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$, segue da proposição acima que

$$\mathbf{v} = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Em resumo, todo vetor pode ser escrito como uma soma de múltiplos dos vetores da base canônica, sendo os coeficientes as coordenadas da extremidade do representante canônico do vetor. Sendo $\mathbf{v} = (x, y)$, a fórmula

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad (8.4)$$

é denominada a **fórmula de expansão ortonormal** de $\mathbf{v}$ na base canônica.

Do ponto de vista de vetores, há duas maneiras básicas de representarmos retas, a primeira delas explorada no exemplo a seguir (para a segunda, veja o exemplo 8.10).

Exemplo 8.5. A proposição anterior nos permite descrever uma reta **parametricamente**, i.e., como a trajetória de uma partícula em movimento sobre a mesma. Para tanto, fixe um sistema Cartesiano de origem O, um ponto $P(x_0, y_0)$ sobre a reta r e um vetor $\mathbf{v} = (a, b)$ paralelo à mesma. À medida em que o *parâmetro* t varia no conjunto dos reais, o axioma 1.8 do volume 1 garante que a extremidade do representante canônico do vetor $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$, onde $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, percorre todos os pontos de r. Portanto, os pontos de r são os pontos (x, y) da forma

$$x = x_0 + ta \text{ e } y = y_0 + tb,$$

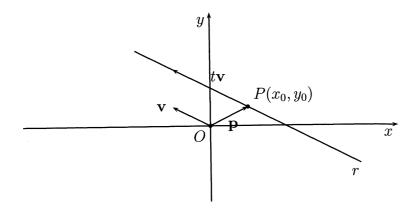



Figura 8.9: representação paramétrica de uma reta.

para algum $t \in \mathbb{R}$, e as igualdades acima são denominadas as **equações paramétricas**.

Terminemos esta seção calculando uma soma de vetores que nos será útil várias vezes no que segue.

Proposição 8.6. Se $A_1A_2 \ldots A_n$ é um polígono regular de centro O, então $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$.

Prova. Suponha, sem perda de generalidade, que o raio do círculo circunscrito ao polígono é igual a 1, e escolha um sistema Cartesiano de coordenadas tal que $A_1(1,0)$. Uma vez que $A_1\widehat{O}A_k = \frac{2\pi}{n}(k-1)$, temos

$$\overrightarrow{OA_k} = \left(\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}, \text{sen}\,\frac{2(k-1)\pi}{n}\right),$$

e basta mostrarmos que

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2(k-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2(k-1)\pi}{n} = 0.$$

Por fim, o que falta segue imediatamente do problema 14, página 319.

■

Problemas – Seção 8.2

1. * Em um sistema Cartesiano de origem O, sejam A e B pontos tais que $\overline{OA} = \overline{OB}$ e o menor ângulo trigonométrico pelo qual devemos girar o vetor $\overrightarrow{OA}$ para fazê-lo coincidir com o vetor $\overrightarrow{OB}$ é igual a $+90°$. Se $\overrightarrow{OA} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, mostre que $\overrightarrow{OB} = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$.

2. Seja ADE um triângulo retângulo em D, tal que $\overline{AE} = 2\overline{AD}$. Construa, exteriormente a tal triângulo, os quadrados $ABCD$, $DEFG$ e $AEIJ$. Em seguida, construa o quadrado $BJKL$ sem pontos interiores em comum com os demais quadrados já construídos. Prove que os pontos C, G e L são colineares e calcule a razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{CG}$ e $\overline{GL}$.

Para o que segue precisamos da seguinte notação: para $\theta \in \mathbb{R}$, denotamos por

$$\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}$$

o vetor unitário que parte da origem de um sistema Cartesiano e forma um ângulo trigonométrico de θ radianos com o semieixo positivo das abscissas (cf. figura 8.10).

3. * Generalize o problema 1, fazendo os dois itens a seguir:

   (a) Se $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e $\alpha \in [0, 2\pi)$ é tal que $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, prove que α é o único real no intervalo $[0, 2\pi)$ tal que $\mathbf{u} = ||\mathbf{u}||\mathbf{e}_\alpha$.

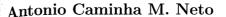
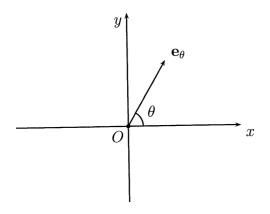



Figura 8.10: o vetor unitário $\mathbf{e}_\theta$.

(b) Se $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ é o vetor obtido de $\mathbf{u}$ pela rotação trigonométrica de ângulo θ, então $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}||$ e $\mathbf{v} = ||\mathbf{v}||\mathbf{e}_{\alpha+\theta}$. Conclua, a partir daí, que

$$c = a\cos\theta - b\,\text{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad d = a\,\text{sen}\,\theta + b\cos\theta.$$

4. * Sejam xOy e $x'Oy'$ sistemas Cartesianos de coordenadas com mesma origem O, tais que o semieixo positivo das abscissas do sistema $x'Oy'$ faz um ângulo trigonométrico de θ radianos com o semieixo positivo das abscissas do sistema xOy. Se um ponto P do plano tem coordenadas (x_0, y_0) no sistema xOy e (x_0', y_0') no sistema $x'Oy'$, prove que

$$x_0' = x_0\cos\theta + y_0\,\text{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad y_0' = -x_0\,\text{sen}\,\theta + y_0\cos\theta.$$

5. O propósito desse problema é obter uma classificação parcial das *curvas-solução* $\mathcal{C}$ da **equação geral de segundo grau**

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (8.5)$$

no plano Cartesiano, onde a, b, c, d, e e f são constantes reais dadas, com ao menos uma dentre a, b e c diferente de zero. Para tanto, faça os seguintes itens:

(a) Seja $x'O'y'$ o sistema Cartesiano obtido a partir de xOy por translação de eixos, tal que a nova origem O' tem coordenadas (x_0, y_0) no sistema xOy. Se $ac - b^2 \neq 0$, use o problema 2 para mostrar que existem únicos tais x_0 e y_0 para os quais a equação de $\mathcal{C}$ no sistema $x'Oy'$ tem a forma

$$a'(x')^2 + 2b'x'y' + c'(y')^2 + f' = 0.$$

(b) Suponha, doravante, que $\mathcal{C}$ seja a curva-solução de uma equação geral do segundo grau da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0.$$

Mostre que $\mathcal{C}$ é simétrica em relação a O, razão pela qual dizemos que se trata de uma curva **central**.

(c) Seja, agora, $x'Oy'$ o sistema Cartesiano obtido a partir de xOy pela rotação do semieixo positivo das abscissas do sistema xOy do ângulo trigonométrico θ. Se $a \neq c$, use o problema anterior para mostrar que θ pode ser escolhido de tal forma que, no sistema $x'Oy'$, a equação que define a curva $\mathcal{C}$ tenha a forma

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + f' = 0.$$

(d) Use o resultado dos itens anteriores para mostrar que, se a curva-solução de (8.5) for central, então ela é o conjunto vazio, a união de duas retas distintas, uma única reta, uma elipse ou uma hipérbole.

6. (Romênia.) Particionamos o plano em hexágonos regulares de interiores disjuntos e lados iguais a 1. Prove que não existe um quadrado cujos vértices sejam também vértices desses hexágonos.

7. Neste problema, apresentamos uma prova alternativa para o problema 6, página 185, desta feita utilizando vetores. Para tanto, nas notações do referido problema, faça os seguintes itens:

   (a) Seja P o ponto de Fermat do triangulo ABC, fixe um sistema Cartesiano de origem P e sejam $\overrightarrow{PA} = x\mathbf{e}_\alpha$, $\overrightarrow{PB} = y\mathbf{e}_\beta$ e $\overrightarrow{PC} = z\mathbf{e}_\gamma$, com $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$. Use o problema 3 para obter

   $$\overrightarrow{PD} = z\mathbf{e}_\gamma + y\mathbf{e}_{\beta+\frac{\pi}{3}} - z\mathbf{e}_{\gamma+\frac{\pi}{3}},$$

   bem como para obter expressões análogas para $\overrightarrow{PE}$ e $\overrightarrow{PF}$.

   (b) Use o fato de $|\alpha - \beta| = |\beta - \gamma| = \frac{2\pi}{3}$ e $|\alpha - \gamma| = \frac{4\pi}{3}$ para concluir que os pontos A, P e D são colineares e $\overline{AD} = x + y + z$.

8.3 O produto escalar de dois vetores

Dados vetores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ no plano, com representantes canônicos $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OW}$, definimos o **ângulo** entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ como o ângulo $0° \leq \theta \leq 180°$ tal que $\theta = V\widehat{O}W$ (cf. figura 8.11). Um pouco de geometria Euclidiana permite verificar prontamente que o ângulo entre os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não depende do sistema Cartesiano escolhido (veja o problema 1).

Por fim, dizemos que dois vetores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são **ortogonais** se $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 90°$. Nesse caso, denotamos $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

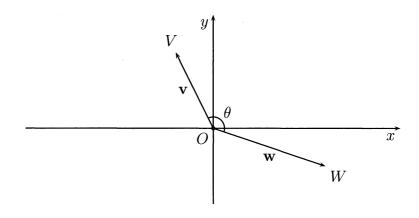



Figura 8.11: ângulo entre dois vetores.

De posse da definição de ângulo entre vetores não nulos, estamos em condições de estudar a mais importante dentre as operações com vetores, o *produto escalar* de dois vetores.

Definição 8.7. O **produto escalar** dos vetores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é o escalar $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ dado por

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = ||v|| \cdot ||w|| \cos \theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \tag{8.6}$$

Estendemos a definição acima a vetores nulos pondo $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ caso $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Observações 8.8.

i) Em Física, é mais comum denotar por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ o produto escalar dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. No entanto, nestas notas daremos preferência à notação $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, mais comum em Matemática.

ii) Chamamos a atenção do leitor para não confundir *produto por escalar* com *produto escalar*. Em que pese a semelhança entre

os nomes, no primeiro caso operamos um escalar com um vetor, obtendo outro vetor por resultado, ao passo que, no segundo caso, operamos dois vetores, obtendo um escalar por resultado.

A proposição a seguir reúne algumas consequências imediatas da definição de produto escalar.

Proposição 8.9. Para todos os vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ e todo escalar k, temos:

(a) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = ||\mathbf{v}||^2$.

(b) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.

(c) $\langle k\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = k\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

(d) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são não nulos, então $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

Prova. Note, inicialmente, que (a), (b) e (c) são imediatos caso $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} = 0$ ou $k = 0$. Suponha, pois, que $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq 0$ e $k = 0$.

(a) Faça $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ na definição de produto escalar, observando que $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

(b) Basta notar que $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \theta(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ e usar novamente a definição.

(c) Analisemos separadamente os casos $k > 0$ e $k < 0$:

- Se $k > 0$, então $k\mathbf{v}$ tem mesma direção e sentido que $\mathbf{v}$, de maneira que $\theta(k\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Portanto, pela definição de produto escalar, temos

$$\begin{aligned} \langle k\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= ||k\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}|| \cos(k\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= |k| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}|| \cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= k\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

- Se $k < 0$, então $k\mathbf{v}$ tem mesma direção mas sentido contrário ao de $\mathbf{v}$, de maneira que $\theta(k\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \pi - \theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (cf. problema 2). Portanto, $\cos\theta(k\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\cos\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e segue da definição de produto escalar que

$$\begin{aligned} \langle k\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= ||k\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}|| \cos(k\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= |k| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||(-\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \\ &= k\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

(d) Como $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, temos $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ se, e só se, $\cos\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$. Mas, como $0^\circ \leq \theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq 180^\circ$, segue que $\cos\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ se, e só se, $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 90^\circ$, ou, o que é o mesmo, $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$. ■

O exemplo a seguir já evidencia a força da noção de produto escalar de dois vetores.

Exemplo 8.10. A operação de produto escalar trivializa a obtenção da equação de uma reta, conquanto conheçamos um de seus pontos e um vetor perpendicular à mesma. Para entender porque, suponha que $\mathbf{v} = (a, b)$ é perpendicular à reta r e que $P(x_0, y_0)$ é um ponto de r (cf. figura 8.12). Sendo $Q(x, y)$ um ponto qualquer do plano, temos

$$\begin{aligned} Q \in r &\Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow (a, b) \perp (x - x_0, y - y_0) \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0. \end{aligned}$$

Por fim, frisamos que também é possível reobter os demais resultados da seção 6.2 com o auxílio de vetores (veja o problema 3).

Outro corolário imediato da definição de produto escalar é a desigualdade a seguir, também conhecida como a **desigualdade de Cauchy**.

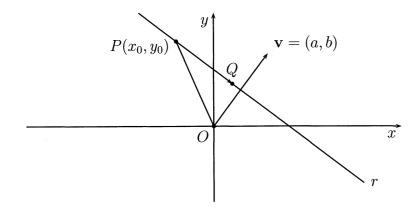



Figura 8.12: equação da reta via produto escalar.

Proposição 8.11. Para todos os vetores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, temos

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq ||\mathbf{v}|| \cdot |\mathbf{w}||, \qquad (8.7)$$

ocorrendo a igualdade se, e só se, $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$ para algum escalar $k > 0$.

Prova. Como $|\cos \theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq 1$, com igualdade se, e só se, $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, temos

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| &= ||v|| \cdot ||w|| \cdot |\cos \theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \\ &\leq ||v|| \cdot ||w||, \end{aligned}$$

com igualdade se, e só se, $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$. Resta então mostrar que $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ se, e só se, a condição dada no enunciado para a igualdade for satisfeita.

Se existe um escalar $k > 0$ tal que $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$, então é imediato que $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$. Reciprocamente, se $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, então segue do problema 2 que $\mathbf{v} = \frac{||v||}{||w||}\mathbf{w}$, e basta tomar $k = \frac{||v||}{||w||} > 0$. ■

A fim de compreendermos a relação entre a versão acima da desigualdade de Cauchy e a versão já conhecida da mesma (cf. teorema

7.14 do volume 1), assim como para outros propósitos, precisamos da proposição a seguir, a qual estabelece a expressão do produto escalar em coordenadas.

Proposição 8.12. Se os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ têm representantes canônicos $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{w} = (x_2, y_2)$ num certo sistema Cartesiano, então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2. \qquad (8.8)$$

Prova. Sendo O a origem do sistema Cartesiano e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{OW}$ (cf. figura 8.13), a lei dos cossenos (7.12) aplicada ao triângulo OVW nos dá

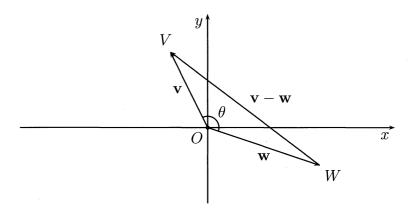



Figura 8.13: O produto escalar em coordenadas.

$$\overline{VW}^2 = \overline{OV}^2 + \overline{OW}^2 - 2\,\overline{OV}\,\overline{OW}\cos\theta$$

e, daí,

$$\begin{aligned} 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= 2||v|| \cdot ||w|| \cos\theta = 2\,\overline{OV}\,\overline{OW}\cos\theta \\ &= \overline{OV}^2 + \overline{OW}^2 - \overline{VW}^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \\ &= 2(x_1 x_2 + y_1 y_2). \end{aligned}$$

■

Corolário 8.13. Para todos os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}$, temos:

$$\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle. \quad (8.9)$$

Prova. Escolha um sistema Cartesiano xOy no plano e suponha que, nesse sistema, os representantes canônicos de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{w}$ são $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ e $\mathbf{w} = (a, b)$. Pelas proposições 8.4 e 8.12, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle &= \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (a, b)\rangle \\ &= (x_1 + x_2)a + (y_1 + y_2)b \\ &= (x_1 a + y_1 b) + (x_2 a + y_2 b) \\ &= \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle. \end{aligned}$$

■

Podemos dar, agora, a interpretação geométrica prometida da desigualdade de Cauchy ordinária: sendo $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{w} = (x_2, y_2)$ os representantes canônicos de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ num sistema Cartesiano fixado, então a proposição 8.12 garante que a desigualdade de Cauchy (8.7) é precisamente

$$|x_1x_2 + y_1y_2| \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Mas isso é exatamente o que diz o teorema 7.14 do volume 1 no caso $n = 2$.

Terminamos esta seção exibindo uma aplicação interessante da fórmula (8.8), a qual estabelece uma recíproca parcial da proposição 8.6.

Exemplo 8.14. Se a soma de três vetores, todos de mesmo módulo, é igual a zero, prove que os ângulos entre os mesmos são todos iguais a 120°.

Prova. Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ denotam os vetores em questão, então a condição do enunciado garante que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (8.10)$$

Seja $k > 0$ o módulo comum dos vetores, e α, β e γ respectivamente os ângulos entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ e $\mathbf{c}$ e $\mathbf{a}$, como na figura 8.14. Fazendo

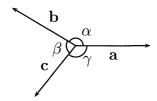



Figura 8.14: vetores de mesmo módulo e com soma nula.

o produto escalar de $\mathbf{a}$ com ambos os membros de (8.10), obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= ||\mathbf{a}||^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ &= k^2 + ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}|| \cos\beta + ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{c}|| \cos\gamma \\ &= k^2 + k^2\cos\alpha + k^2\cos\gamma \end{aligned}$$

e, daí, $\cos\alpha + \cos\gamma = -1$. Analogamente, fazendo o produto escalar de $\mathbf{b}$ com ambos os membros de (8.10), obtemos $k^2\cos\alpha + k^2 + k^2\cos\beta = 0$ e, daí, a $\cos\alpha + \cos\beta = -1$. Também analogamente, concluímos que $\cos\beta + \cos\gamma = -1$ e temos, então, o sistema de equações

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\gamma = -1 \\ \cos\alpha + \cos\beta = -1 \\ \cos\beta + \cos\gamma = -1 \end{cases}.$$

Mas tal sistema é linear nas variáveis $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, e um cálculo imediato permite concluir que sua única solução é $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{2}$. Portanto, pelo problema 7, página 318, cada um dentre α, β e γ é igual a 120° ou 240°; mas, como $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, a única possibilidade é ser $\alpha = \beta = \gamma = 120°$. ■

Problemas – Seção 8.3

1. * Prove que a definição do ângulo entre dois vetores independe do sistema Cartesiano escolhido.

2. * Dados vetores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, relacione os ângulos $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $\theta(-\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

3. Prove, utilizando vetores, o corolário 6.11 e as proposições 6.13 e 6.14.

4. Dada uma reta $r : \{ax + by + c = 0\}$ e um ponto $P(x_0, y_0)$ não pertencente a r, prove que a distância de P a r pode ser calculada pela seguinte fórmula:
$$d(P; r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

5. Considere no plano um polígono regular $A_1A_2 \ldots A_n$ de centro O e um círculo Γ, também de centro O. Para $P \in \Gamma$, mostre que $\sum_{i=1}^{n} \overline{PA_i}^2$ independe da posição de P.

6. Use vetores para dar uma outra demonstração para o problema 22, página 333.

7. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam, ainda, H o ortocentro, O o circuncentro e R o raio do círculo circunscrito a ABC. Use o resultado do problema 6, página 352, juntamente com a definição de produto escalar de vetores, para mostrar que
$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

8. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sejam, ainda, I o incentro, O o circuncentro e r e R respectivamente os raios dos círculos inscrito e circunscrito a ABC. Use o resultado do problema 7, página 352, juntamente com a definição de produto escalar de vetores, para mostrar que
$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr.$$

9. (BMO.) Em um triângulo ABC, O é o circuncentro, D é o ponto médio de AB e E é o baricentro de ACD. Prove que as retas $\overleftrightarrow{OE}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são perpendiculares se, e só se, $\overline{AB} = \overline{AC}$.

10. * O propósito deste problema é provar o seguinte teorema de H. Minkowski: para $2 < n \neq 4$, não existe, no plano Cartesiano, um polígono regular de n lados e tendo vértices de coordenadas inteiras. Para tanto, faça os seguintes itens:

    (a) Conclua, a partir do exemplo 6.7, que, no plano Cartesiano, não existe um hexágono regular com vértices de coordenadas inteiras.

    (b) Adapte o argumento da solução do exemplo 6.7, em conjunção com o resultado do problema 8, página 331, para mostrar que, no plano Cartesiano, não existe um pentágono regular com vértices de coordenadas inteiras.

(c) Sejam $n > 6$ inteiro e $\mathcal{P}_0 = A_1A_2 \ldots A_n$ um polígono regular com vértices de coordenadas inteiras e lado l. Sejam O a origem do sistema Cartesiano e $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ para $1 \leq i \leq n$ (com $A_{n+1} = A_1$). Se A'_i for tal que $\overrightarrow{OA'_i} = \mathbf{a}_i$, mostre que $\mathcal{P}_1 = A'_1A'_2 \ldots A'_n$ também é um polígono regular de n lados, com vértices de coordenadas inteiras e lado $l' = 2l \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$.

(d) Itere a construção do item anterior, obtendo uma sequência $(\mathcal{P}_k)_{k \geq 0}$ de polígonos regulares no plano Cartesiano, todos com vértices de coordenadas inteiras e tal que, sendo l_k o lado de $\mathcal{P}_k$, tenhamos $l_k = (2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n})^k l_0$, para todo $k \geq 0$.

(e) Obtenha, a partir do item anterior, uma contradição.

CAPÍTULO 9

Sugestões e Soluções

Seção 1.2

11. Se α, β e γ são as medidas dos ângulos em questão, então $\alpha+\beta+\gamma = 360°$. Supondo $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, conclua que $\alpha \leq 120° \leq \gamma$.

Seção 1.3

1. Para o passo de indução, considere um polígono $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$, de $k + 1$ lados. A diagonal A_1A_k o divide em dois polígonos: o triângulo $A_1A_kA_{k+1}$ e o polígono de k lados $A_1A_2 \ldots A_k$. Observe, agora, que as diagonais de $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ são de um dentre três tipos: (a) A_1A_k; (b) diagonais de $A_1A_2 \ldots A_k$; (c) diagonais A_iA_{k+1}, para $2 \leq i \leq k-1$. Some os totais de diagonais de cada um dos tipos (a), (b) e (c), utilizando a hipótese de indução para o tipo (b).

3. Algebrize o problema, i.e., denote por n, $n+1$ e $n+2$ os números de lados dos polígonos e, em seguida, utilize o resultado da proposição 1.12 para montar uma equação de segundo grau na incógnita n.

Seção 2.1

1. Para o item (a), considere triângulos escalenos ABC e $A'BC$ no plano, tais que $\overline{AB} = \overline{A'B}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C}$. A razão da impossibilidade de mover (no plano) um deles até fazê-lo coincidir com o outro é o fato de que eles têm *orientações* distintas.

Seção 2.2

1. Siga os passos da construção descrita no exemplo 2.9.
2. Siga os passos da construção descrita no exemplo 2.10.
3. Siga os passos da construção descrita no exemplo 2.11.
4. Comece construindo a reta perpendicular a r e passando por A.
5. Comece construindo o triângulo ABM, onde M é o ponto médio do lado BC.
6. No triângulo ABC, sejam M o ponto médio do lado BC e $A' \in \overrightarrow{AM}$ tal que $\overline{A'M} = \overline{AM}$. Mostre que $A'MC \equiv AMB$ e, em seguida, use esta conclusão para construir o triângulo $AA'C$. Construa, agora, o ponto médio M de AA' e obtenha o vértice B como o ponto sobre $\overrightarrow{CM}$ tal que $\overline{BM} = \overline{CM}$.
7. Divida o ângulo α em duas partes iguais (com o auxílio da construção da bissetriz) e, em seguida, construa o triângulo ABP, onde P é o pé da bissetriz interna de ABC relativa ao lado BC. Em seguida, obtenha o vértice C como a interseção de $\overrightarrow{BP}$ com $\overrightarrow{AX}$, onde $B\widehat{A}X = \alpha$.

8. Se M é o ponto médio do lado BC, mostramos na proposição 2.13 que os triângulos ABM e ACM são congruentes por LLL. Conclua, daí, que AM é bissetriz de $\angle BAC$ e que $B\widehat{M}A = C\widehat{M}A$. Por fim, use o fato de $B\widehat{M}A + C\widehat{M}A = 180°$ para concluir que AM é altura.
9. Se P e H coincidirem, mostre que $ABP \equiv ACP$ por ALA; se M e H coincidirem, use LAL em vez de ALA.
10. Uma vez que $\overline{OA} = \overline{OB}$, é suficiente combinar os resultados dos dois problemas anteriores.

Seção 2.3

1. Comece analisando o triângulo isósceles construído justapondo os catetos iguais dos dois triângulos retângulos sob consideração; em seguida, aplique o resultado do problema 8, página 45.
2. Comece mostrando que ADE isósceles de base DE e, daí, que $\overline{BD} = \overline{CE}$. Conclua que os triângulos DBC e ECB são congruentes por LAL e, daí, que $D\widehat{C}B = E\widehat{B}C$.
3. Consideremos o caso das medianas relativas aos lados AB e AC (a análise dos outros dois casos é totalmente análoga). Sendo M_b e M_c os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente, mostre que os triângulos BCM_b e CBM_c são congruentes por LAL.
4. Sendo E o pé da perpendicular baixada de P ao lado BC, mostre que os triângulos BAP e BEP são congruentes por LAAo.

6. Trace, pelo vértice do ângulo de medida γ, a paralela às retas r e s. Em seguida, aplique o corolário 2.18.
7. Adapte a sugestão do problema anterior ao presente caso.
8. Trace $\overrightarrow{BD}$ e aplique o teorema do ângulo externo aos triângulos ABD e ACD.

9. Sejam X o ponto de interseção de AB e CD e Y o ponto de interseção de AE e CD. Aplique o teorema do ângulo externo aos triângulos BCX e DEY.

10. Use (a) e a proposição 2.19 para provar (b) e, em seguida, (b) para provar (c).

11. Use o fato de que os triângulos ABM e ACM são ambos isósceles para concluir que $A\widehat{B}M = B\widehat{A}M = \alpha$ e $A\widehat{C}M = C\widehat{A}M = \beta$. Em seguida, some os ângulos de ABC.

12. Faça $\widehat{B} = 2\beta$, $\widehat{C} = 2\gamma$. Em seguida, use a proposição 2.19 para calcular $B\widehat{I}C$ e $B\widehat{A}C$ em termos de β e γ.

13. Use o resultado do problema anterior.

14. Adapte a sugestão do penúltimo problema ao caso em questão.

15. Faça $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$ e $C\widehat{D}E = \theta$. Em seguida, use o teorema do ângulo externo para calcular $A\widehat{D}E$ e $A\widehat{E}D$ em termos de α e θ. Por fim, use o fato de $A\widehat{D}E = A\widehat{E}D$.

16. Denote $\widehat{A} = \alpha$. Em seguida, use a proposição 2.13 e o teorema do ângulo externo várias vezes para calcular os ângulos dos triângulos AEF, DEF, CDE e BCD em termos de α. Por fim, aplique a proposição 2.19 ao triângulo ABC.

17. Mostre que os pares de triângulos AMB e DME, AMF e DMC, BCM e EMF são congruentes. Em seguida, use tais congruências para mostrar que $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $\widehat{C} = \widehat{F}$. Por fim, aplique o resultado do problema 11 desta seção.

18. Considere separadamente os casos $A \notin r$ e $A \in r$. Para o caso $A \notin r$, suponha que haja duas retas distintas s e t, ambas perpendiculares a r e passando por A. Sendo B e C, respectivamente, os pontos de interseção das retas s e t com r, calcule a soma dos ângulos do triângulo ABC para chegar a uma contradição.

19. Para o item (a), trace por B a reta r paralela a AC. Sendo Q e R, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P às retas r e $\overleftrightarrow{AC}$, mostre primeiro que a soma pedida é igual a $\overline{QR}$.

20. Faça $B\widehat{A}D = C\widehat{A}D = \alpha$. Em seguida, use o teorema do ângulo externo para calcular $A\widehat{D}C$ e $A\widehat{D}B$ em termos de α, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

21. Trace $DG \parallel BC$, com $G \in AB$, e marque, em seguida, o ponto F de interseção de CG com BD. Calcule $B\widehat{E}C$ e conclua, com o auxílio do problema 2 desta seção, que $\overline{BE} = \overline{BC} = \overline{BF}$. Conclua, daí, que $E\widehat{F}G = 40° = E\widehat{G}F$. Por fim, use tais fatos para mostrar que os triângulos EGD e EFD são congruentes.

Seção 2.4

1. Use a desigualdade triangular para mostrar que o terceiro lado não pode medir 14cm.

2. Adapte a sugestão dada ao problema anterior.

3. Use a desigualdade triangular, em conjunção com o resultado da proposição 2.23.

4. Aplique a desigualdade triangular aos triângulos AQR, BPR e CPQ. Em seguida, some ordenadamente as desigualdades assim obtidas.

6. Fatore $a^3 + b^3$ e use que $a + b > c$ duas vezes.

7. Aplique a desigualdade triangular aos triângulos PAC e PBD.

8. Argumente por indução sobre $n \geq 3$. O caso inicial é fornecido pela desigualdade triangular. Para o passo de indução, seja dado um polígono convexo $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$, com $k \geq 3$; aplique a hipótese de indução a $A_1A_2 \ldots A_k$ e a desigualdade triangular a $A_1A_kA_{k+1}$.

9. Se A' e D' denotam, respectivamente, os simétricos dos pontos A e D com respeito às retas r e s, sejam B e C as interseções de $A'D'$ com r e s, também respectivamente. Se $B' \in r$ e $C' \in s$ são tais que $B' \neq B$ ou $C' \neq C$, argumente de maneira análoga à solução do exemplo 2.28 para concluir que $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} < \overline{AB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D}$. Para tanto, utilize o resultado do problema anterior.

10. Trace, por P, o segmento QR paralelo a BC, com $Q \in AB$ e $R \in AC$. Em seguida, use a proposição 2.23 e a desigualdade triangular para provar que $\overline{AP} < \overline{AR}$ e $\overline{BP} + \overline{PC} < \overline{BQ} + \overline{QR} + \overline{CR}$.

11. Sejam B' o simétrico de B em relação a AC e C' o simétrico de C em relação a AB'. Se P' é o simétrico de P em relação a AC, temos $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$ e $\overline{CP} = \overline{CP'} = \overline{C'P'}$, de sorte que

$$\overline{BQ} + \overline{PQ} + \overline{CP} = \overline{BQ} + \overline{P'Q} + \overline{C'P'} > \overline{BC'} = 2l.$$

12. Se, na cidade A, aterrissaram aviões provenientes das cidades B e C, use a proposição 2.23 para concluir que $B\widehat{A}C > 60°$. Em seguida, use este fato para mostrar, por contradição, que não podemos ter seis aviões aterrissando em uma mesma cidade.

Seção 2.5

1. Sejam AB e CD os segmentos, nomeados de tal forma que o quadrilátero em questão seja $ABCD$. Se $AC \cap BD = \{M\}$, mostre que os triângulos ABM e CDM são congruentes. Em seguida, aplique a proposição 2.35.

2. Use o teorema da base média quatro vezes, para concluir que o quadrilátero que tem por vértices os pontos médios dos lados de $ABCD$ tem pares de lados opostos iguais.

3. Sejam M o ponto médio de BC e P e Q os pés da perpendiculares baixadas de A e M à reta r, respectivamente. Pela proposição 2.40,

é suficiente mostrarmos que $\overline{AP} = 2\overline{MQ}$. Para tanto, marque os pontos R e S, tais que R é o ponto médio de AG e S o pé da perpendicular baixada de R à reta r; em seguida, use a proposição 2.38 para mostrar que os triângulos RSG e MQG são congruentes.

4. Sejam M o ponto médio do lado BC e G o baricentro de ABC. A proposição 2.38 e o exemplo 2.6 garantem que podemos construir o triângulo BGM. A partir daí, é imediato obtermos o vértice C. Por fim, marque sobre $\overrightarrow{MG}$ o ponto A, tal que $G \in AM$ e $\overline{AG} = 2\overline{GM}$.

5. Sejam G o baricentro e M_a e M_b os pontos médios dos lados BC e AC, respectivamente. Sejam, ainda, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Para a primeira parte, aplique item (b) do exemplo 2.27, juntamente com a proposição 2.38. Para a segunda, comece aplicando a desigualdade triangular ao triângulo M_aGM_b, juntamente com a proposição 2.38, pra concluir que $\frac{2}{3}(m_a + m_b) > \frac{c}{2}$; em seguida, argumente de modo análogo para concluir que $\frac{2}{3}(m_b + m_c) > \frac{a}{2}$ e $\frac{2}{3}(m_a + m_c) > \frac{b}{2}$. Somando membro a membro essas três desigualdades, obtemos a desigualdade desejada.

6. Observe que R é o baricentro do triângulo AQB e aplique a proposição 2.38.

7. Sejam M e N os pontos médios de CD e AB, respectivamente. Trace por M as paralelas aos lados não paralelos e marque os pontos P e Q, de interseção de tais retas com AB. Supondo, sem perda de generalidade, que $\overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, conclua que $APMD$ e $BCMQ$ são paralelogramos. Em seguida, use esse fato para mostrar que $M\widehat{M}Q = 90°$, calcular PQ e mostrar que MN é a mediana relativa à hipotenusa do triângulo PMQ. Por fim, aplique o corolário 2.44.

8. Sendo M o ponto de interseção das diagonais de $ABCD$, use o teorema da base média de trapézios duas vezes, para mostrar que a soma das distâncias de A e C a r é igual à soma distâncias de B e D a r.

9. Trace $CE \parallel AD$, com $E \in AB$. Em seguida, conclua que o quadrilátero $AECD$ é um paralelogramo e use esse fato para mostrar que o triângulo BCE é isósceles de base CE.

10. Marque o ponto E sobre AB, tal que $\overline{BE} = \overline{BC}$. Em seguida, mostre que o quadrilátero $AECD$ é um paralelogramo.

11. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos BC e AD, tais que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{BC} = c$ e $\overline{AD} = d$. Trace, por C, a paralela ao lado AD e suponha que tal reta intersecta a base AB em E. Em seguida construa o triângulo EBC com o auxílio do exemplo 2.6.

12. Se M é o ponto médio de BC, use o corolário 2.44 para concluir que o triângulo ABM é equilátero.

13. Aplique o corolário 2.44 aos triângulos BCH_c e BCH_b.

14. Marque os pontos G e H, sendo G o médio de BC e H o ponto de interseção das semirretas $\overrightarrow{EG}$ e $\overrightarrow{AB}$. Estabeleça a congruência dos triângulos BGH e CGE e, em seguida, use a condição do enunciado para concluir que o triângulo AEH é isósceles de base EH. Por fim, aplique o resultado do problema 8, página 8, juntamente com a congruência entre os triângulos ABG e ADF.

15. Construa, sucessivamente, retângulos $BCD'A'$ e $CD'A''B'$, tais que $\overline{A'B} = \overline{AB}$ e $\overline{B'C} = \overline{BC}$. Em seguida, sejam Q' e Q'' os simétricos de Q em relação às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente, de sorte que $Q' \in \overleftrightarrow{AD}$ e $Q'' \in A'D'$; sejam, ainda, P' o simétrico de P em relação a $\overleftrightarrow{BC}$ e R o simétrico de Q'' em relação a $\overleftrightarrow{CD'}$, de sorte que $P' \in CD'$ e $R \in A''D'$. Mostre que o perímetro de $MNPQ$ é igual a $\overline{Q'M} + \overline{MN} + \overline{NP'} + \overline{P'R}$ e que $\overline{AQ'} = \overline{A''R}$. Por fim, use o resultado do problema 8, página 8.

16. Suponha $\overline{AB} < \overline{AC}$ (o caso $\overline{AB} = \overline{AC}$ é trivial e o caso $\overline{AB} > \overline{AC}$ é totalmente análogo ao caso sob consideração). Seja Q o ponto de interseção do lado AC com a semirreta $\overrightarrow{BP}$; mostre que P é o ponto médio de BQ e, em seguida, aplique o teorema da base média ao triângulo BQC.

Seção 3.1

1. O centro do círculo desejado deve distar r do ponto A e pertencer à mediatriz do segmento AB. Mostre que há uma solução se $\overline{AB} = 2r$ e duas soluções se $\overline{AB} < 2r$.

3. Uma vez construído um segmento AB de comprimento c, o vértice C deve pertencer ao círculo de centro B e raio a e à reta $\overleftrightarrow{AX}$, tal que $B\widehat{A}X = \alpha$.

6. Uma vez construído o lado BC, o vértice A é obtido como a interseção da paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, situada à distância h_a da mesma, com o círculo de centro B e raio c.

8. Os eventuais pontos B pertencem, claramente, a dois lugares geométricos: o círculo de centro A e raio a e o LG dos pontos do plano que estão à distância b da reta r (cf. exemplo 3.3).

9. Comece traçando uma reta r (que será a reta suporte do lado AC) e marcando, sobre a mesma, um ponto C. Em seguida, obtenha o vértice B do triângulo como a interseção de dois lugares geométricos: o círculo de centro C e raio a, bem como a união das paralelas à reta r, situadas à distância h_b de r.

10. Se B_1 e B_2 são dois pontos distintos sobre a reta r e M_1 e M_2 são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos AB_1 e AB_2, então M_1M_2 é base média do triângulo AM_1M_2. Aplique, agora, a proposição 2.36, juntamente com o resultado do problema anterior.

11. Use o resultado do problema 10, página 45, juntamente com a proposição 3.5.

12. Use o resultado do problema 10, página 45.

13. Supondo o problema resolvido, marque, sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e exteriormente ao lado BC, os pontos B' e C' tais que $B \in B'C$, $C \in BC'$ e $\overline{BB'} = c$, $\overline{CC'} = b$. Então, $\overline{B'C'} = 2p$ e, pelo teorema do ângulo externo, $A\widehat{B'}C = \frac{\beta}{2}$ e $A\widehat{C'}B = \frac{\gamma}{2}$.

14. Comece mostrando que, em um triângulo retângulo e isósceles, a altura relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa. Em seguida, use o teorema da base média de um trapézio para mostrar que a distância de M à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é constante.

Seção 3.2

2. Marque o vértice A como a interseção de dois lugares geométricos: a semirreta $\overrightarrow{BX}$, tal que $X\widehat{B}I = I\widehat{B}C$, e a semirreta $\overrightarrow{CY}$, tal que $Y\widehat{C}I = I\widehat{C}B$.

3. Marque o vértice A como a interseção de dois lugares geométricos: a perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BC}$ passando por H e a perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BH}$ passando por C.

4. Sendo A o ponto de interseção de r e s, veja o ponto P como ortocentro de um triângulo que tem A como um de seus vértices.

5. Para a recíproca, suponha, inicialmente, que H e I coincidem. Se H_a é o pé da altura relativa a BC, observe que $H_a \in BC$; a soma dos ângulos de ABH_a fornece, então, $\frac{1}{2}\widehat{A}+\widehat{B} = 90°$; mostre, analogamente, $\frac{1}{2}\widehat{A}+\widehat{C} = 90°$ e $\frac{1}{2}\widehat{B}+\widehat{C} = 90°$, de forma que $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$. Suponha, agora, que H e O coincidem. Use as relações $\overleftrightarrow{AO} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $\overline{BO} = \overline{CO}$ para concluir que $\overleftrightarrow{AO}$ é mediatriz de BC, de sorte que $\overline{AB} = \overline{AC}$; conclua, analogamente, que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Por fim, suponha que I e O coincidem. Então $\overline{AI} = \overline{BI}$, de sorte que $\frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{B}$; mostre, analogamente, que $\frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{C}$.

Seção 3.3

1. Seja s uma reta que passa por P, distinta da tangente t construída na proposição 3.16. Sejam O o centro de Γ e α a medida do ângulo agudo formado pelas retas s e t. Marque o ponto $Q \in s$, situado no mesmo semiplano que O em relação a t e tal que $P\widehat{O}Q = 2\alpha$. Mostre que $Q \in \Gamma$.

2. Supondo o problema resolvido, seja O o centro de um dos círculos pedidos. Então $\overleftrightarrow{AO} \perp r$ em A, de forma que O pertence à reta s, perpendicular à reta r em A.

3. Supondo o problema resolvido, seja O o centro de um dos círculos pedidos. Pelo problema anterior, O pertence à reta perpendicular a r por P. Por outro lado, como O equidista de r e de s, ele também pertence à bissetriz de um dos ângulos formados por tais retas. Há duas soluções.

4. Observe que, se O é o centro de um tal círculo, então a distância de O a r é igual a R.

5. Supondo o problema resolvido, se O é o centro de um dos círculos pedidos, então O pertence à bissetriz de um dos ângulos formados por tais retas e está à distância R de r. Há quatro soluções.

6. Supondo o problema resolvido, se O é o centro de um dos círculos pedidos, então O equidista de a e de b, bem como pertence à bissetriz de um dos ângulos formados por a e c. Há duas soluções.

7. Observe, inicialmente, que $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ se, e só se, $\overline{PO_1} \leq R_1$ e $\overline{PO_2} \leq R_2$; nesse caso, use a desigualdade triangular para concluir que $|R_1 - R_2| \leq \overline{O_1O_2} \leq R_1 + R_2$. Analise, agora, cada um dos itens separadamente.

8. Seja Γ' um círculo de centro O' e raio R'. Se $O' \in \overleftrightarrow{AO} \setminus \{A\}$ e $R' = \overline{AO'}$, mostre que Γ' tangencia Γ em A.

9. Se Γ' tem centro O' e raio r e tangencia Γ, então, pelo problema 7, página 121, temos $\overline{OO'} = R \pm r$.

10. Sendo R o ponto de tangência de $\overleftrightarrow{BC}$ e Γ, temos $\overline{BR} = \overline{BP}$ e $\overline{CR} = \overline{CQ}$. Conclua, a partir daí, que o perímetro de ABC é igual a $\overline{AP} + \overline{AQ}$.

11. Sendo P o ponto de tangência, temos, pela proposição 3.28, que $M\widehat{A}P = \frac{1}{2}B\widehat{A}P$ e $N\widehat{A}P = \frac{1}{2}D\widehat{A}P$.

12. Sendo B, C e R, respectivamente, os pontos de tangência das retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ com Γ, temos, pela proposição 3.28, que $P\widehat{O}R = \frac{1}{2}B\widehat{O}R$ e $Q\widehat{O}R = \frac{1}{2}C\widehat{O}R$. Use, agora, o fato de que a soma dos ângulos do quadrilátero $ABOC$ é igual a $360°$.

13. Observe, inicialmente, que $X\widehat{B}Y = 180° - B\widehat{X}Y - B\widehat{Y}X$. Em seguida, use o teorema do ângulo inscrito para mostrar que as medidas dos ângulos $\angle AXB$ e $\angle AYB$ independem da direção da reta $\overleftrightarrow{XY}$.

14. Use o teorema do ângulo inscrito para mostrar que os triângulos DEF e BEF são ambos isósceles.

15. Se O é o ponto sobre AP, tal que $\overline{PQ} = \overline{BP}$, mostre que o triângulo BPQ é equilátero e, daí, que $A\widehat{Q}B = 120°$. Em seguida, use as hipóteses, juntamente com os fatos já deduzidos e o teorema do ângulo inscrito, para mostrar que os triângulos ABQ e CBP são congruentes por LAAo.

16. Em ambos os casos, adapte o argumento da prova do item (a) da proposição 3.21.

17. Mostre que o centro de cada um de tais arcos é o simétrico do centro de cada um dos arcos de $180° - \alpha$ sobre AB.

18. Após marcar um segmento BC de comprimento a, obtenha o vértice A como a interseção de dois lugares geométricos: os arcos capazes de α sobre BC e as paralelas à reta $\overleftrightarrow{BC}$, situadas à distância h_a.

19. Se $\widehat{A} = \alpha$, veja o vértice A como a interseção de dois arcos capazes de $\frac{\alpha}{2}$, construídos respectivamente sobre BM e CM. Em seguida, use a igualdade $\overline{BM} = \overline{CM}$ para concluir que $\overline{AB} = \overline{AC}$.

20. Use o fato de que $M\widehat{A}P = N\widehat{A}P = 45°$ para obter A como a interseção de dois arcos capazes de $45°$, respectivamente sobre MP e NP. Em seguida, marque $B \in \overrightarrow{AM}$ e $D \in \overrightarrow{AN}$, tais que $\overline{AB} = \overline{AD} = l$.

21. Use o resultado do problema 13, página 57.

22. Inicialmente, observe que há quatro tangentes comuns aos dois círculos, as quais se dividem em dois tipos: duas tangentes, ditas *externas*, que deixam os dois círculos em um mesmo semiplano e duas outras, ditas *internas*, que os deixam em dois semiplanos opostos. Analisemos a construção de uma tangente que deixa os círculos em um mesmo semiplano (para as tangentes do outro tipo, adapte a construção acima descrita). Sejam r uma tal tangente, O e O' os centros e R e R' os raios de Γ e Σ, respectivamente, e T e T' os pontos de tangência de r com Γ e Σ, também respectivamente; supondo, sem perda de generalidade, que $R > R'$, trace a reta s, paralela a r e passando por O' e marque o ponto S de interseção do raio OT com s. O triângulo $OO'S$ é retângulo em S e tal que $\overline{OS} = R - R'$; construa-o para obter o ponto S e, em seguida, marque a interseção T da semirreta $\overrightarrow{OS}$ com Γ; por fim, trace a tangente desejada r como a paralela à reta s passando pelo ponto T.

23. Supondo o problema resolvido, sejam M e N, respectivamente, os pontos médios dos segmentos AX e AY, de forma que $\overline{MN} = \frac{l}{2}$. Construa, então, um triângulo O_1O_2P, retângulo em P e tal que $O_1P \parallel MN$. Mostre que haverá solução se, e só se, $\overline{O_1O_2} \geq \frac{l}{2}$.

24. Analise a solução do problema anterior.

25. Inicialmente, considere os arcos capazes de $120°$, construídos sobre os lados e exteriormente ao triângulo ABC. Em seguida, aplique a construção do problema 23, página 123.

26. Analise as soluções dos dois problemas anteriores, procurando adaptá-las à condição de comprimento máximo possível para o lado de ABC.

27. Supondo o problema resolvido, seja A' o ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{BA}$, tal que $BA' = l$. Mostre, com o auxílio do teorema do ângulo externo, que $B\widehat{A'}C = \frac{\alpha}{2}$. Agora, construa A' como a interseção de dois lugares geométricos: o círculo de centro B e raio l, juntamente com os arcos capazes de $\frac{\alpha}{2}$ sobre BC. Por fim, A é a interseção de $A'B$ com a mediatriz do segmento $A'C$.

28. Marque o ponto $A' \in \overrightarrow{BA} \setminus AB$, tal que $\overline{AA'} = \overline{AC}$. Em seguida, use o teorema do ângulo externo para mostrar que $B\widehat{A'}C = \frac{1}{2}B\widehat{A}C$. Agora, use a solução do exemplo 3.25 para mostrar que o círculo de centro M e raio $\overline{MB} = \overline{MC}$ passa pelo ponto A'. Por fim, use este fato, juntamente com $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{A'B}$, para concluir que $\overline{BN} = \overline{A'N}$.

Seção 3.4

2. Use o teorema do ângulo inscrito para mostrar que $M\widehat{A}N = 90°$.

3. Mostre que $AM \perp NP$, calculando o ângulo ex-cêntrico interior formado por tais segmentos.

4. Sendo ABC o triângulo formado pelos pontos de interseção das retas dadas, mostre que os pontos desejados são o incentro e os ex-incentros de ABC.

5. Consideremos o caso em que ABC é acutângulo, sendo os demais casos totalmente análogos. Temos $O\widehat{A}C = \frac{1}{2}(180° - A\widehat{O}C) = \frac{1}{2}(180° - 2\widehat{B}) = 90° - \widehat{B} = B\widehat{A}H$. Agora, sendo I o incentro de ABC, temos $H\widehat{A}I = B\widehat{A}I - B\widehat{A}H = C\widehat{A}I - O\widehat{A}C = O\widehat{A}I$.

6. Sejam ABC um triângulo acutângulo (a prova nos demais casos é análoga), H seu ortocentro e H_a o pé da altura relativa a A. Como $\overleftrightarrow{HH_a} \perp \overleftrightarrow{BC}$, basta mostrarmos que, sendo P o outro ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{AH}$ com o círculo circunscrito a ABC, tem-se $\overline{HH_a} = \overline{H_aP}$. Para tanto, use o teorema do ângulo inscrito para estabelecer a congruência dos triângulos BH_aP e BH_aH por ALA.

7. Seja α' o arco do círculo circunscrito a ABC que é complementar a α. Use o resultado do problema anterior para mostrar que H percorre o arco de círculo simétrico a α' em relação a BC.

8. Use o resultado do problema 15, página 57 para mostrar que I_a descreve um dos arcos capazes de $90° - \frac{\alpha}{2}$ sobre BC.

9. Comece mostrando que AH é a bissetriz do ângulo $\angle I_1HI_2$; em seguida, mostre que $I_1\widehat{A}I_2 = 90° - \frac{1}{2}I_1\widehat{H}I_2$ e aplique o resultado do problema anterior.

10. Adapte a sugestão dada para o problema 20, página 123, utilizando o resultado da proposição 3.38 para obter dois pontos sobre a diagonal AC, por exemplo.

11. Sendo M o ponto médio do lado BC, use o resultado do problema 16, página 87, para calcular $\overline{PM}$ em função de $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$; em seguida, calcule $\overline{QR}$ em função de a e b com o auxílio da proposição 3.37 e use o resultado do problema 12, página 56.

12. Nas notações da figura 3.29, observe que o triângulo ANI_a é retângulo em N e tal que $\overline{AN} = p$, $\overline{NI_a} = r_a$; portanto, podemos construí-lo. Após executar tal construção, trace o círculo ex-inscrito ao lado BC (o qual tem centro I_a e raio r_a), bem como a outra tangente ao mesmo passando por A. Note, agora, que podemos marcar sobre AN o ponto de tangência E do círculo inscrito em ABC com o lado AC, uma vez que $\overline{EN} = a$. Após fazê-lo, marque o incentro I de ABC, como a interseção de AI_a com a reta perpendicular a AN e passando por E. Por fim, trace o círculo inscrito em ABC (o qual tem centro I e raio $\overline{IE}$) e uma das tangentes comuns internas aos círculos inscrito e ex-inscrito (cf. problema 22, página 123), obtendo os pontos B e C.

Seção 3.5

1. Se Γ é o círculo de diâmetro AB e P é seu ponto de interseção com a reta $\overleftrightarrow{BC}$, use o teorema do ângulo inscrito para mostrar que $A\widehat{P}C = 90°$.

2. Para o item (a), comece mostrando que o quadrilátero BCH_bH_c é inscritível; em seguida, conclua que $H_b\widehat{H_c}C = H_b\widehat{B}C$ e, daí, que $A\widehat{H_c}H_b = H_b\widehat{C}B$. Para (b), use (a), juntamente com o fato de que $H_c\widehat{A}O = B\widehat{A}O = 90° - \frac{1}{2} \cdot A\widehat{O}B = 90° - A\widehat{C}B$.

3. Sejam A, B, C, D, E e F os seis pontos de interseção das quatro retas dadas, tais que A, B e C são colineares, $E \in BF$, $D \in AF$ e $E \in CD$. Se $P \neq A$ é o ponto de interseção dos círculos circunscritos aos triângulos ACD e ABF, basta mostrar que P pertence aos círculos circunscritos aos triângulos BCE e DEF. Para tanto, use a inscritibilidade dos quadriláteros $ACPD$ e $PBAF$ para concluir que $P\widehat{C}E = P\widehat{A}D = P\widehat{A}F = P\widehat{B}F = P\widehat{B}E$.

4. Note, inicialmente, que $B\widehat{C}D = 90°$. Agora, mostre sucessivamente que $M\widehat{B}Q = M\widehat{N}Q$ e $MNBQ$ é inscritível; conclua, a partir daí, que $M\widehat{N}B = 90°$. Em seguida, mostre sucessivamente que $M\widehat{D}P = M\widehat{N}P$ e $MDNP$ é inscritível; conclua, então, que $M\widehat{P}D = 90°$.

5. Se E é o pé da perpendicular baixada de P à reta suporte do lado AC, mostre que $P\widehat{Q}A = P\widehat{C}A = P\widehat{C}E = P\widehat{D}E$.

6. Use o resultado do problema anterior para reduzir o problema ao cálculo do ângulo $Q\widehat{A}Q'$, onde Q e Q' são os pontos de Γ, obtidos como naquele problema.

7. Comece supondo que o polígono é inscritível; nesse caso, argumente como na prova da proposição 3.9 para concluir que as mediatrizes dos lados do polígono concorrem em um único ponto.

8. Use o teorema de Pitot e os cálculos da Proposição 3.37 para concluir pela coincidência dos pontos de tangência dos dois círculos com a diagonal AC.

9. Suponha, inicialmente, que exista um círculo Γ, de centro O e tangente aos lados do polígono. Se A é um vértice do polígono e B e C são os pés das perpendiculares baixadas de O aos lados adjacentes a A, mostre que os triângulos OAB e OAC são congruentes, de forma que $B\widehat{A}O = C\widehat{A}O$. Para a recíproca, argumente de modo análogo.

10. Use o fato de os quadriláteros $EPCN$, $ABCD$ e $PEQD$ serem inscritíveis para mostrar que $N\widehat{P}E = Q\widehat{P}E$; argumente analogamente para os demais vértices de $MNPQ$ e use, em seguida, o resultado do problema anterior.

11. Argumente de modo análogo à primeira parte da demonstração do teorema de Pitot.

12. Sejam $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Supondo o problema resolvido, marque D sobre o arco $\overset{\frown}{AC}$ de Γ que não contém B e sejam $\overline{CD} = x$ e $\overline{AD} = y$. Inicialmente, mostre que podemos supor $a \neq b$, digamos $a < b$, de sorte que devemos ter $x - y = b - a > 0$. Se $E \in CD$ for tal que $\overline{CE} = b - a$, então E pertence ao círculo de centro C e raio $b - a$; use o fato de ADE ser isósceles e $ABCD$ ser inscritível para mostrar que E também pertence a um dos arcos capazes de $180° - \frac{1}{2}A\widehat{B}C$ sobre AC.

Seção 4.1

1. Aplique o teorema de Thales.

2. Faça $\overline{AB} = a$, $\overline{AP_1} = x$ e $\overline{AP_2} = y$; em seguida, analise a igualdade acima à luz dessas notações.

3. Adapte os passos de construção do exemplo 4.3.

4. Seja P o pé da bissetriz interna relativa a BC. Trace, pelo ponto B, a paralela à reta $\overleftrightarrow{AP}$ e marque seu ponto de interseção B' com a reta $\overleftrightarrow{AC}$. Prossiga, a partir daí, de maneira análoga ao argumento apresentado no texto.

5. Verifique que o argumento da prova do teorema da Bissetriz, delineado na sugestão ao problema anterior, permanece válido no presente caso.

6. Use o teorema da Bissetriz e a construção da quarta proporcional para construir um segmento de comprimento $\overline{AC}$.

7. Use o teorema da Bissetriz para mostrar que $\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AC}}$. Em seguida, aplique a recíproca do teorema de Thales.

8. Sejam G o baricentro e M_a, M_b e M_c os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Marque o ponto $P \in \overrightarrow{GM_a}$, tal que $\overline{GM_a} = \overline{M_aP}$. Como as diagonais de $GCPB$ se intersectam nos respectivos pontos médios, o quadrilátero $GCPB$ é um paralelogramo, de sorte que $\overline{BP} = \overline{GC}$. Agora, a proposição 2.38 garante que $\overline{GP} = \frac{2}{3}m_a$, $\overline{GB} = \frac{2}{3}m_b$ e $\overline{BP} = \frac{2}{3}m_c$. Aplicando uma construção análoga à do exemplo 4.2, podemos construir segmentos de comprimentos $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ e $\frac{2}{3}m_c$. Em seguida, com o auxílio do exemplo 2.6, podemos construir o triângulo BGP. A partir daí, marcamos $A \in \overrightarrow{PG}$ tal que G seja o ponto médio de AP, e $C \in \overrightarrow{BM_a}$ tal que M_a seja o ponto médio de BC.

Seção 4.2

1. Em cada um desses casos, adapte os argumentos da prova da proposição 4.6.

2. Sejam r a reta horizontal e A o ponto de interseção da perpendicular a r traçada por X com a paralela a r traçada por Y. Sejam, ainda, B o ponto de interseção da perpendicular a r traçada por Y com a paralela a r traçada por Z. Use a semelhança entre os triângulos XAY e YBZ para calcular o comprimento pedido.

3. Sejam M_a e M'_a, respectivamente, os pontos médios dos lados BC e $B'C'$. Mostre que os triângulos ABM_a e $A'B'M'_a$ são semelhantes

por LAL e, conclua, a partir daí, que $\frac{m_a}{m'_a} = k$. Argumente de maneira análoga para os pares de triângulos ABP_a, $A'B'P'_a$ e ABH_a, $A'B'H'_a$ para estabelecer as duas outras razões.

4. Se $Q \in AB$ é tal que $PQ \perp AB$, então $\overline{AQ} = \overline{PQ}$ e $PQB \sim CAB$.

5. Sejam X e Y, respectivamente, os pontos de interseção de r com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Use o resultado do problema anterior, juntamente com o fato de que o triângulo XAY é retângulo e isósceles.

6. Comece mostrando que $FAD \sim EAB$.

7. Sejam O e O' os centros dos círculos dados e P e P' os pontos de tangência dos mesmos com um dos lados do ângulo em questão. Utilize a semelhança entre os triângulos AOP e $AO'P'$ para calcular o comprimento pedido.

8. Para o item (a), use a semelhança $CNP \sim CBA$. Para o item (b), use o fato de que as diagonais de um losango bissectam seus ângulos internos.

9. Trace, por C, a paralela à $\overleftrightarrow{AB}$ e marque seu ponto F de interseção com $\overline{DE}$. Use, em seguida, que $CFD \sim BMD$ e $CFE \sim AME$.

10. Sejam h e H, respectivamente, as alturas dos trapézios $MNCD$ e $ABCD$. Se $\overline{MP} = x$, use as semelhanças $MPD \sim ABD$ e $MPA \sim DCA$, juntamente com o resultado do problema 3, para obter, respectivamente, $\frac{x}{a} = \frac{h}{H}$ e $\frac{x}{b} = \frac{H-h}{H}$. Conclua, a partir daí, que $x = \frac{ab}{a+b}$. Por fim, argumente de maneira análoga para calcular $\overline{NP}$.

11. Aplique o problema anterior ao trapézio $BCYX$.

12. Para concluir que $\overline{EF} = \overline{FG}$, use a semelhança $AEG \sim ADC$, juntamente com o resultado do problema 3. De posse dessa igualdade, mostre que, para concluir que $\overline{FG} = \overline{GH}$, é suficiente provar que $\overline{EG} = \overline{FH}$. Para tanto, sejam H e h, respectivamente, as alturas

5. Verifique que o argumento da prova do teorema da Bissetriz, delineado na sugestão ao problema anterior, permanece válido no presente caso.

6. Use o teorema da Bissetriz e a construção da quarta proporcional para construir um segmento de comprimento $\overline{AC}$.

7. Use o teorema da Bissetriz para mostrar que $\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AC}}$. Em seguida, aplique a recíproca do teorema de Thales.

8. Sejam G o baricentro e M_a, M_b e M_c os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente. Marque o ponto $P \in \overrightarrow{GM_a}$, tal que $\overline{GM_a} = \overline{M_aP}$. Como as diagonais de $GCPB$ se intersectam nos respectivos pontos médios, o quadrilátero $GCPB$ é um paralelogramo, de sorte que $\overline{BP} = \overline{GC}$. Agora, a proposição 2.38 garante que $\overline{GP} = \frac{2}{3}m_a$, $\overline{GB} = \frac{2}{3}m_b$ e $\overline{BP} = \frac{2}{3}m_c$. Aplicando uma construção análoga à do exemplo 4.2, podemos construir segmentos de comprimentos $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ e $\frac{2}{3}m_c$. Em seguida, com o auxílio do exemplo 2.6, podemos construir o triângulo BGP. A partir daí, marcamos $A \in \overrightarrow{PG}$ tal que G seja o ponto médio de AP, e $C \in \overrightarrow{BM_a}$ tal que M_a seja o ponto médio de BC.

Seção 4.2

1. Em cada um desses casos, adapte os argumentos da prova da proposição 4.6.

2. Sejam r a reta horizontal e A o ponto de interseção da perpendicular a r traçada por X com a paralela a r traçada por Y. Sejam, ainda, B o ponto de interseção da perpendicular a r traçada por Y com a paralela a r traçada por Z. Use a semelhança entre os triângulos XAY e YBZ para calcular o comprimento pedido.

3. Sejam M_a e M'_a, respectivamente, os pontos médios dos lados BC e $B'C'$. Mostre que os triângulos ABM_a e $A'B'M'_a$ são semelhantes por LAL e, conclua, a partir daí, que $\frac{m_a}{m'_a} = k$. Argumente de maneira análoga para os pares de triângulos ABP_a, $A'B'P'_a$ e ABH_a, $A'B'H'_a$ para estabelecer as duas outras razões.

4. Se $Q \in AB$ é tal que $PQ \perp AB$, então $\overline{AQ} = \overline{PQ}$ e $PQB \sim CAB$.

5. Sejam X e Y, respectivamente, os pontos de interseção de r com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Use o resultado do problema anterior, juntamente com o fato de que o triângulo XAY é retângulo e isósceles.

6. Comece mostrando que $FAD \sim EAB$.

7. Sejam O e O' os centros dos círculos dados e P e P' os pontos de tangência dos mesmos com um dos lados do ângulo em questão. Utilize a semelhança entre os triângulos AOP e $AO'P'$ para calcular o comprimento pedido.

8. Para o item (a), use a semelhança $CNP \sim CBA$. Para o item (b), use o fato de que as diagonais de um losango bissectam seus ângulos internos.

9. Trace, por C, a paralela à $\overleftrightarrow{AB}$ e marque seu ponto F de interseção com $\overline{DE}$. Use, em seguida, que $CFD \sim BMD$ e $CFE \sim AME$.

10. Sejam h e H, respectivamente, as alturas dos trapézios $MNCD$ e $ABCD$. Se $\overline{MP} = x$, use as semelhanças $MPD \sim ABD$ e $MPA \sim DCA$, juntamente com o resultado do problema 3, para obter, respectivamente, $\frac{x}{a} = \frac{h}{H}$ e $\frac{x}{b} = \frac{H-h}{H}$. Conclua, a partir daí, que $x = \frac{ab}{a+b}$. Por fim, argumente de maneira análoga para calcular $\overline{NP}$.

11. Aplique o problema anterior ao trapézio $BCYX$.

12. Para concluir que $\overline{EF} = \overline{FG}$, use a semelhança $AEG \sim ADC$, juntamente com o resultado do problema 3. De posse dessa igualdade, mostre que, para concluir que $\overline{FG} = \overline{GH}$, é suficiente provar que $\overline{EG} = \overline{FH}$. Para tanto, sejam H e h, respectivamente, as alturas

dos trapézios $ABCD$ e $ABHE$. Agora, use os pares de semelhanças $AEG \sim ADC$ e $BHF \sim BCD$, juntamente com o resultado do problema 3, para obter $\overline{EG} = \overline{FH} = \frac{h}{H} \cdot \overline{CD}$.

13. Se D é o pé da bissetriz interna traçada a partir de B, mostre que $ABC \sim ADB$.

14. Use o resultado do problema anterior, juntamente com a recíproca do teorema de Pitágoras.

15. Os triângulos $AA'C$ e ABH_a são semelhantes por AA, uma vez que $A\widehat{A'}C = A\widehat{B}H_a$, pelo teorema do ângulo inscrito.

16. Pela proposição 3.20, temos $A\widehat{B}D = A\widehat{C}F$ e $A\widehat{C}D = A\widehat{B}E$. Conclua, a partir daí, que $ABD \sim ACF$ e $ACD \sim ABE$ por AA. Por fim, deduza a relação do enunciado a partir de tais semelhanças.

17. Use relações métricas em triângulos retângulos.

18. Use as relações métricas em triângulos retângulos.

19. Para o item (a), use as relações métricas em triângulos retângulos.

20. Use o resultado do item (a) do problema anterior.

21. Verifique que os triângulos BMP, CNM e APN são congruentes por LAL, de forma que MNP é equilátero. Agora, sendo M_a o ponto médio do lado BC, mostre que $BMP \sim BM_aA$ por LAL, de sorte que $P\widehat{M}B = A\widehat{M_a}B = 90°$.

22. Se $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, temos $y = \sqrt{x^2 - c^2}$. Por outro lado, pelo teorema de Pitágoras x é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem a e b, ao passo que y é o comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede x e o outro cateto mede c. É, pois, suficiente construir esses dois triângulos retângulos, o que pode ser feito sem dificuldades.

23. Se r é o raio do círculo inscrito em $ABCD$ e $l = \overline{BC}$, então $\overline{AD} = 2r$ e, pelo teorema de Pitot, $2r + l = 16$. Por outro lado, se E é o pé da perpendicular baixada de C à base AB, então o fato de $ABCD$ ser retângulo em A garante que $C\widehat{E}B = 90°$ e, daí, o teorema de Pitágoras fornece $(2r)^2 + 8^2 = l^2$. Resolva o sistema de equações formado por essas duas relações para obter os valores de r e l. Em seguida, denote por O o centro do círculo inscrito em $ABCD$ e observe que $O\widehat{C}B + O\widehat{B}C = \frac{1}{2}D\widehat{C}B + \frac{1}{2}A\widehat{B}C = 90°$, de sorte que OBC é retângulo em O. Aplique, então, as relações métricas em triângulos retângulos para calcular $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$.

24. Suponha, sem perda de generalidade, que $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FC} = 5$cm. Agora, sendo $\overline{AB} = x$ e $\overline{AC} = y$, o teorema de Pitágoras fornece $x^2 + y^2 = 400$. Por outro lado, sendo respectivamente P o pé da perpendicular baixada de D ao lado AB, use semelhança de triângulos para concluir que $\overline{BP} = \frac{x}{4}$ e $\overline{DP} = \frac{y}{4}$, de sorte que, novamente pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AD}^2 = (\frac{3x}{4})^2 + (\frac{y}{4})^2$. Raciocinando de maneira análoga, obtenha expressões para $\overline{AE}^2$ e $\overline{AF}^2$ em função de x e de y e, por fim, calcule a soma $\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2$ com o auxílio das expressões assim obtidas e da relação $x^2 + y^2 = 400$.

25. Evidentemente, o problema só tem sentido para $l \leq 2R$ e, se $l = 2R$, o LG pedido se resume ao centro O do círculo. Suponha, pois, $l < 2R$. Sendo AB uma corda de comprimento l e M seu ponto médio, segue do fato de o triângulo AOB ser isósceles de base AB que $OM \perp AB$. Portanto, pelo teorema de Pitágoras temos $\overline{OM} = \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2}$ e, denotando tal comprimento por r, segue que M pertence ao círculo de centro O e raio r. Reciprocamente, não é difícil revertermos os passos da análise acima para concluir que todo ponto de tal círculo é ponto médio de uma corda de $\Gamma(O; R)$, de comprimento l.

26. Sendo P um tal ponto e PT uma das tangentes a Γ traçadas a partir de P, temos pelo teorema de Pitágoras que $\overline{PO}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{TO}^2 = l^2 + R^2$. Portanto, P pertence ao círculo de centro O e raio $\sqrt{R^2 + l^2}$. Reciprocamente, reverta os passos do argumento acima para mostrar

que todo, por todo ponto de tal círculo, podemos traçar tangentes de comprimento l a $\Gamma(O;R)$.

27. Sejam A o topo e B a base do edifício, assim como C e D as posições inicial e final do pedestre. Sejam $A\widehat{C}B = \alpha$ e $A\widehat{D}B = \frac{\alpha}{2}$. Pelo teorema do ângulo externo, temos $D\widehat{A}C = A\widehat{C}B - A\widehat{D}B = \frac{\alpha}{2}$, de sorte que o triângulo ACD é isósceles de base AD. Portanto, $\overline{AC} = \overline{CD} = 50$ e, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, obtemos $\overline{AB} = \sqrt{50^2 - 25^2} = 25\sqrt{3}$.

28. Suponha, sem perda de generalidade, que $A \in r$, $B \in s$ e $C \in t$, e sejam D e E, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de A e B à reta t. Agora, sendo $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = l$, temos $\overline{CE} = \sqrt{l^2 - 1}$, $\overline{CD} = \sqrt{l^2 - 16}$ e $\overline{DE} = \sqrt{l^2 - 9}$. Por outro lado, não é difícil verificar que $D \in CE$, de sorte que $\sqrt{l^2 - 1} = \sqrt{l^2 - 16} + \sqrt{l^2 - 9}$. Resolvendo tal equação, encontramos o valor de l.

29. Como os passarinhos têm velocidades iguais, partem no mesmo instante e chegam juntos, concluímos que a fonte equidista dos topos das duas torres. Denotando por d tal distância comum, segue que as distâncias da fonte às bases das torres são iguais a $\sqrt{d^2 - 900}$ e $\sqrt{d^2 - 1600}$. Portanto, $\sqrt{d^2 - 900} + \sqrt{d^2 - 1600} = 50$ e, resolvendo tal equação, encontramos o valor de d, bem como o valor desejado, qual seja, $\sqrt{d^2 - 900}$.

30. Seja ABC o triângulo em questão, com $\overline{AB} = 5\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 7$ e $A\widehat{B}C = 135^\circ$. Sendo H o pé da altura traçada a partir de A, temos $A\widehat{B}H = 45^\circ$, de sorte que ABH é um triângulo retângulo e isósceles. Aplicando ao mesmo o teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{AH} = \overline{BH} = 5$. Por fim, aplicando novamente o teorema de Pitágoras, desta feita ao triângulo AHC, obtemos $\overline{AC} = 13$.

31. As paralelas aos lados de $ABCD$, passando por P, particionam $ABCD$ em quatro retângulos, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_4$. Nomeie tais retângulos de tal forma que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ só têm o vértice P em comum, e sejam a_1 e b_1 os lados de $\mathcal{R}_1$ e a_2 e b_2 os lados de $\mathcal{R}_2$. Aplicando o teorema de Pitágoras quatro vezes, mostre que $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2$.

32. Se P está sobre o arco menor $\overset{\frown}{AD}$, segue do teorema do ângulo externo que $A\widehat{P}C = B\widehat{P}D = 90^\circ$. Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 = 200$ e, analogamente, $\overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 = 200$.

33. Aplique o teorema de Pitágoras aos quatro triângulos retângulos nos quais o quadrilátero fica particionado quando traçamos suas diagonais.

34. Sejam O_1, O_2 e O_3, respectivamente, os centros dos círculos de raios R, r e x. Para $1 \leq i \leq 3$, seja A_i o pé da perpendicular traçada de A_i à reta s. Use o teorema de Pitágoras para concluir que $\overline{A_1A_2} = \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} = 2\sqrt{Rx}$ e, analogamente, $\overline{A_1A_3} = 2\sqrt{Rr}$, $\overline{A_2A_3} = 2\sqrt{rx}$. Em seguida, use o fato de que $\overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}$ para obter a relação do enunciado.

35. Use o resultado do problema anterior.

Seção 4.3

1. Seja $P \in BC$ o pé da bissetriz interna relativa a A. Comece construindo o ponto $Q \in \overleftrightarrow{BC} \setminus BC$, tal que $\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$ – para uma construção fácil de Q, revise os passos de construção elencados no exemplo 4.16. Em seguida, obtenha o vértice A como a interseção do círculo de diâmetro PQ com o círculo de centro C e raio b.

2. Esse problema é uma pequena variação do problema anterior.

3. Marque, sobre uma reta r, pontos B e C tais que $\overline{BC} = a$. Em seguida, obtenha o vértice A como a interseção de dois lugares geométricos: o círculo de Apolônio relativo a (B, C), na razão $\frac{3}{4}$, e o círculo de centro no ponto médio de BC e raio m_a.

4. O raio pedido é igual a $\frac{1}{2}\overline{PQ}$, onde $P \in BC$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC} \setminus BC$ são tais que $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = k$. Use tais relações para calcular $\overline{BP}$ e $\overline{BQ}$ em função de k e $\overline{BC}$; em seguida, observe que $\overline{PQ} = \overline{BQ} \pm \overline{BP}$, conforme seja $0 < k < 1$ ou $k > 1$.

5. Sejam $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{AD} = d$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a + d \geq b + c$ e $c + d \geq a + b$; use o teorema de Ptolomeu para mostrar que um ponto P como pede o enunciado pode ser encontrado no arco $\widehat{AD}$ que não contém B, e que P é a interseção de Γ com o círculo de Apolônio relativo a (A, C), tal que $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{a+d-p}{c+p-b}$, onde , $p = \overline{AC}$.

6. Para os itens (a) e (b), use o teorema do ângulo inscrito para concluir que, se $P \neq B$ é o ponto de interseção dos círculos circunscritos aos triângulos BCD e ABF, então $B\widehat{P}D = D\widehat{P}C = 60°$ e $A\widehat{P}F = F\widehat{P}B = 60°$. Conclua, então, que $A\widehat{P}C = 120°$ – de forma que P também pertence ao círculo circunscrito a ACE – e que A, P, D e C, P, F são ternos de pontos colineares. Para o item (c), use os resultados dos itens (a) e (b), juntamente com o corolário 4.18.

7. Use a identidade $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1$, juntamente com a recíproca do teorema de Pitágoras.

8. Usando a construção do problema anterior, juntamente com o teorema de Ptolomeu, mostre que podemos obter um círculo Γ' e pontos $A_1', A_2', \ldots, A_n' \in \Gamma'$, tais que $A_1'A_2'$ é um diâmetro de Γ' e $\overline{A_i'A_j'} \in \mathbb{Q}$, para $1 \leq i < j \leq n$. Sendo O o centro e R o raio de Γ', seja Γ o círculo de centro O e raio kR. Para $1 \leq i \leq n$, seja $A_i \in \overrightarrow{OA_i'}$ o ponto tal que $\overline{OA_i} = k\overline{OA_i'}$, de sorte que $A_i \in \Gamma$. Mostre que podemos escolher k de forma tal que $\overline{A_iA_j} \in \mathbb{N}$, para $1 \leq i < j \leq n$.

9. Se O' é o circuncentro de ABD e M e M' são os pontos médios dos lados BC e AD, respectivamente, use o teorema 4.19 para concluir que $\overline{BH} = 2\overline{O'M'} = 2\overline{OM}$. Em seguida, observe que $\overline{BC} = 2\overline{MC}$ para concluir que os triângulos BHC e MOC são semelhantes.

10. O teorema 4.19 permite marcar, sucessivamente, as posições do baricentro G e do vértice A de ABC. Uma vez feito isso, os pontos B e C são obtidos como as interseções do círculo de centro O e raio AO com a reta que passa por M e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OM}$.

11. Seja P o ponto em que a bissetriz interna relativa ao lado BC intersecta o círculo circunscrito ao triângulo AHO. O teorema do ângulo inscrito garante que $H\widehat{A}P = H\widehat{O}P$ e $O\widehat{A}P = O\widehat{H}P$. Por outro lado, segue do problema 5, página 135, que $H\widehat{A}P = O\widehat{A}P$, de sorte que $H\widehat{O}P = O\widehat{H}P$. Portanto, $\overline{HP} = \overline{OP}$ e, assim, P pertence à mediatriz do segmento HO.

12. Inicialmente, observe que $\overleftrightarrow{AH_1} \parallel \overleftrightarrow{BH_2}$. Agora, o teorema 4.19 fornece $\overline{AH_1} = \overline{BH_2} = 2\overline{OM}$, onde O é o centro do círculo circunscrito a $ABCD$ e M é o ponto médio do lado CD. Portanto, o problema 1, página 85, garante que o quadrilátero AH_1H_2B é um paralelogramo.

13. Seja M o ponto médio de BC. Como $\overline{AO} = \overline{CO}$ e (pelo teorema 4.19) $\overline{AH} = 2\overline{OM}$, temos $\overline{CO} = 2\overline{OM}$. Use, agora, o resultado do problema 12, página 86.

Seção 4.4

1. Pelo teorema de Menelaus, é suficiente mostrar que $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$. Para tanto, suponha que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ concorrem em O (o caso em que $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas é mais simples) e aplique o teorema de Menelaus aos triângulos $BB'Z$ (com o terno de pontos colineares A, A', O), $AA'Y$ (com o terno de pontos colineares C, C', O) e $CC'X$ (com o terno de pontos colineares B, B', O).

2. Use as semelhanças de triângulos $BB'C \sim A'AC$, $BCC' \sim BA'A$ e $BB'A \sim C'CA$.

3. O caso em que ABC é retângulo é imediato. Para o caso em que ABC é obtusângulo, adapte a discussão do caso em que ABC é acutângulo, observando que exatamente duas alturas de ABC são exteriores ao mesmo.

4. Para o item (d), aplique os teoremas de Ceva e Menelaus.

5. Use o teorema de Ceva, em conjunção com o item (a) da proposição 3.37.

6. Use o teorema de Ceva, em conjunção com o item (c) da proposição 3.37.

7. É suficiente mostrar que, se $\overleftrightarrow{AA''}$ e $\overleftrightarrow{CC''}$ concorrem num ponto P, então $P \in \overleftrightarrow{BB''}$. Para tanto suponha, sem perda de generalidade, que $A' \in BC$ e $B' \in \overrightarrow{CA} \setminus AC$, de sorte que $C' \in \overrightarrow{BA} \setminus AB$ (os demais casos são análogos). Se $B\widehat{A}A'' = \alpha$, a isogonalidade de $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{AA''}$ garante que $C\widehat{A}A' = \alpha$, ao passo que o paralelismo de $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$, juntamente com a isogonalidade de $\overrightarrow{CC'}$ e $\overrightarrow{CC''}$, fornece $C''\widehat{C}B = A\widehat{C}C' = C\widehat{A}A' = \alpha$. Portanto, temos $B\widehat{C}P = B\widehat{C}C'' = \alpha = B\widehat{A}A'' = B\widehat{A}P$, de sorte que o quadrilátero $BACP$ é inscritível; segue, então, que $P\widehat{B}C = P\widehat{A}C$. Por fim, tal igualdade, em conjunção com a isogonalidade de $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{AA''}$ e o paralelismo de $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$, nos dá, $P\widehat{B}C = A''\widehat{A}C = A'\widehat{A}B = A\widehat{B}B'$. Segue que $\overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{BP}$ são isogonais em relação a B, de maneira que $P \in \overleftrightarrow{BB''}$.

8. Aplique três vezes o resultado do problema 5, página 135.

9. Se $P' \in \overleftrightarrow{QR}$ é tal que $\overrightarrow{AP'} \perp \overleftrightarrow{QR}$, use o fato de que o quadrilátero $AQPR$ é inscritível para mostrar, diretamente, que as semirretas $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AP'}$ formam ângulos iguais com a bissetriz interna de ABC relativa a A, bem como estão situadas em semiplanos opostos em relação à reta suporte de tal bissetriz.

10. Aplique os teoremas de Ceva e Menelaus.

11. Inicialmente, suponha que $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{BC'} = \{X\}$, $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'C} = \{Y\}$ e $\overleftrightarrow{A'C} \cap \overleftrightarrow{BC'} = \{Z\}$; aplique o teorema de Menelaus ao triângulo XYZ, em relação a cada um dos ternos de pontos colineares a seguir: A, C, E; B', C, D; A', B, F; A, B, C; A', B', C'. Considere, agora, os casos em que ao menos um dentre os pares de retas $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$, $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{A'C}$, $\overleftrightarrow{A'C}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ seja formado por retas paralelas.

12. Suponha, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$, de modo que $P \in \overrightarrow{CB} \setminus BC$, $Q \in \overrightarrow{CA} \setminus AC$ e $R \in \overrightarrow{AB} \setminus AB$. Pelo teorema de Menelaus, é suficiente provar que $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$. Para tanto, observe que, pela proposição 3.20, temos $PAB \sim PCA$. Daí, $\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, de maneira que $\frac{BP}{PC} = -(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}})^2$. Por fim, argumente de maneira análoga para obter $\frac{CQ}{QA} = -(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}})^2$ e $\frac{AR}{RB} = -(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}})^2$.

13. Suponha ABC acutângulo (os demais casos são totalmente análogos). Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo ABC, em relação ao terno de pontos colineares D, E, P, obtemos $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = -1$. Agora, as semelhanças de triângulos $CEH_a \sim CH_aA$ e $AEH_a \sim AH_aC$, fornecem as igualdades $\overline{CE} = \frac{\overline{CH_a}^2}{\overline{AC}}$ e $\overline{AE} = \frac{\overline{AH_a}^2}{\overline{AC}}$, de forma que $\frac{CE}{EA} = \frac{\overline{CH_a}^2}{\overline{AH_a}^2}$. Analogamente, temos $\frac{AD}{DB} = \frac{\overline{AH_a}^2}{\overline{BH_a}^2}$. Agora, argumente de maneira análoga em relação aos outros dois lados de ABC. Por fim, multiplicando as relações assim obtidas, chegamos à igualdade $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$, a qual garante, novamente pelo teorema de Menelaus, a colinearidade dos pontos P, Q e R.

Seção 4.5

1. Examine, quanto à semelhança, os triângulos PBC e PCA.

2. Sendo E a outra extremidade do diâmetro de Γ que passa por D, aplique o teorema das cordas às cordas AB e DE. Alternativamente, aplique (4.5), com C no lugar de P.

3. Aplique o teorema das cordas.

4. Comece utilizando o teorema das cordas para calcular $\overline{CE}$. Em seguida, sejam O o centro do círculo e F e G os pés das perpendiculares baixadas de O a AB e CD, respectivamente; calcule sucessivamente $\overline{OF}$, $\overline{OG}$ e $\overline{OE}$, este último com o auxílio do teorema de Pitágoras. Por fim, aplique (4.5) para calcular o raio do círculo.

5. Sendo D a outra extremidade do diâmetro do círculo circunscrito que passa por A, aplique o teorema das cordas às cordas AD e BC.

6. Seja ABC um triângulo retânguo em A. Trace o círculo de centro C e raio $\overline{AC}$, e sejam D e E os pontos de interseção de tal círculo com $\overleftrightarrow{BC}$. Agora, aplique a versão do teorema das cordas constante da proposição 4.29.

7. Sendo T um desses pontos de contato, use o teorema das cordas para calcular $\overline{PT}$ em termos de $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.

8. Sejam O o centro do círculo desejado, T seu ponto de tangência com a reta r e s a reta perpendicular a r passando por T. Uma vez construído o ponto T, podemos obter O como a interseção de s com a mediatriz do segmento AT. Para o que falta, há dois casos a considerar: (i) $\overleftrightarrow{AB} \parallel r$: nesse caso, T coincide com o ponto de interseção de r com a mediatriz de AB; (ii) $\overleftrightarrow{AB} \nparallel r$: sendo P a interseção de $\overleftrightarrow{AB}$ e r, segue do teorema das cordas que $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$; use, agora o problema 20, página 171, para construir um segmento de comprimento $\overline{PT}$ e, portanto, para construir T.

9. Use o fato de $\overline{PA_1} = \frac{1}{2}\overline{A_1A_2} = \overline{PA_2}$ para concluir que P pertence ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2; em seguida, argumente analogamente em relação a Q.

10. Como CD é um diâmetro de Σ, o triângulo CDE é retângulo em E; portanto, as relações métricas em triângulos retângulos fornecem $\overline{ME}^2 = \overline{CM} \cdot \overline{DM}$. Agora, aplique o teorema das cordas às cordas AB e CD de Γ para concluir que $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{EM}$.

11. Inicialmente, mostre que ambos os círculos passam pelo pé H_a da altura de ABC relativa a BC. Em seguida, mostre que os pares de cordas MN e AH_a do círculo de diâmetro AC, assim como os pares de cordas PQ e AH_a do círculo de diâmetro AB, intersectam-se no ortocentro H de ABC. Aplique o teorema das cordas a cada um de tais pares de cordas para concluir que $\overline{MH} \cdot \overline{NH} = \overline{PH} \cdot \overline{QH}$. Por fim, mais uma aplicação do teorema das cordas garante que M, N, P e Q são concíclicos.

12. Suponha, sem perda de generalidade, que $X \in BY$. Pela proposição 4.28, basta provar que $\overline{BC} \cdot \overline{BO} = \overline{BX} \cdot \overline{BY}$. Para tanto, sejam $P \in BC$ e $Q \in \overrightarrow{BC} \setminus BC$, tais que PQ é diâmetro de Γ; use o fato de que $\overline{BP} \cdot \overline{BQ} = \overline{BX} \cdot \overline{BY}$, juntamente com o resultado do problema 4, página 185, para obter a igualdade desejada.

13. Sendo N o pé da bissetriz externa relativa ao vértice C, segue do exemplo 4.22 que os pontos N, E e D são colineares. Portanto, ambos C e D pertencem ao círculo de Apolônio relativo a (A, B), na razão $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$. Sendo M o centro de tal círculo, segue do problema anterior que o quadrilátero $AMCD$ é inscritível, de sorte que $C\widehat{M}D = \frac{1}{2}\widehat{A}$ e $D\widehat{M}A = \widehat{C}$. Por fim, use o teorema do ângulo externo para obter $M\widehat{C}F = M\widehat{F}C = \frac{1}{2}\widehat{C} + \widehat{B}$ e some os ângulos do triângulo isósceles MCF para encontrar $\widehat{A} = 120°$.

14. Se PQ é o diâmetro do círculo circunscrito contendo os pontos I e O, aplique o teorema das cordas às cordas FG e PQ, juntamente com o resultado do teorema de Euler 4.31, para mostrar que

$$\overline{DF} \cdot \overline{EG} + r(\overline{DF} + \overline{EG}) + r^2 = 2Rr,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito a ABC. Em seguida, use que $\overline{FG} \leq 2R$ para concluir que $\overline{DF} + \overline{EG} \leq 2(R - r)$; a partir daí, obtenha a desigualdade desejada. É, agora, imediato verificar que a igualdade ocorre se, e só se, FG for um diâmetro do círculo circunscrito a ABC.

15. Se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, aplique o teoremas da Bissetriz e o teorema das cordas para obter $\overline{AD} \cdot \overline{DK} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$; em seguida, use a semelhança de triângulos $ABD \sim AKC$ para obter $\overline{AD} \cdot \overline{AK} = bc$ e, a partir daí,

$$\overline{AD}^2 = bc - \overline{AD} \cdot \overline{DK} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AD} \cdot \overline{DK}} = \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 - 1.$$

Por fim, conclua, a partir dos cálculos acima, que é suficiente estabelecermos a desigualdade

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 \geq 12,$$

com igualdade se, e só se, $a = b = c$. Por sua vez, prove tal desigualdade aplicando, apropriadamente, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

16. Se Γ_1 for o círculo interior a α, seja P (resp. Q) o ponto de tangência de α e Γ_1 (resp. α e Γ_2); sejam, ainda, S e T os pontos de interseção do segmento O_1O_2 respectivamente com Γ_1 e Γ_2, C o ponto de interseção dos segmentos PQ e ST, B a outra interseção da reta $\overleftrightarrow{AC}$ com α e R e U as outras interseções das semirretas $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{ST}$ com Γ_2. Adapte os argumentos do exemplo 4.39 para mostrar, sucessivamente, que: $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{RT}$; o quadrilátero $PSQU$ é inscritível; $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{SC} \cdot \overline{CU}$; o quadrilátero $ASBU$ é inscritível. Por fim, construa o ponto B como a outra interseção da reta $\overleftrightarrow{AC}$ com o círculo circunscrito ao triângulo ASU, reduzindo uma vez mais o problema àquele discutido no exemplo 4.38.

18. Sejam K e L (resp. M e N) os pés das perpendiculares baixadas de P (resp. Q) aos lados AB e AC, respectivamente. De acordo com o problema 9, página 200, temos $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{MN}$. Sendo R o ponto de interseção de $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{MN}$, conclua, a partir daí, que os quadriláteros $LRPN$ e $PRMK$ são inscritíveis. Use este fato, juntamente com o teorema das cordas, para mostrar que $\overline{AM} \cdot \overline{AK} = \overline{AL} \cdot \overline{AN}$ e, portanto, que o quadrilátero $LMKN$ também é inscritível. Por fim, note que o centro do círculo circunscrito a tal quadrilátero é a interseção das mediatrizes dos segmentos LM e KN, coincidindo, então, com o ponto médio do segmento PQ. Argumente analogamente com os pés das perpendiculares baixadas de P e Q ao lado BC.

19. Se P e Q denotam os pontos de tangência de α com $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, e R e S denotam as interseções de $\overleftrightarrow{PQ}$ respectivamente com $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$, mostre que $\overline{AR} = \overline{AS}$. Sendo O a interseção das perpendiculares traçadas, a partir de R e S, respectivamente às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$, mostre que $\overline{OR} = \overline{OS}$. Por fim, se β é o círculo de centro O e raio $\overline{OR} = \overline{OS}$, mostre que os pontos B e D estão sobre o eixo radical dos círculos α e β, de maneira que $E, F \in \beta$.

20. Para $i = 1, 2$, sejam $\Gamma_i(O_i; R_i)$. Seja, ainda, P o centro de um círculo que intersecta Γ_i segundo um diâmetro A_iB_i do mesmo, para $i = 1, 2$. Use o fato de que $\overline{PA_1} = \overline{PA_2}$ para concluir que $\overline{PO_1}^2 - \overline{PO_2}^2 = R_2^2 - R_1^2$. Em seguida, compare tal relação com (4.9) para concluir que P pertence à reta simétrica ao eixo radical de Γ_1 e Γ_2 em relação ao ponto médio do segmento O_1O_2.

21. Suponha, inicialmente, que D, E e F são colineares. Então, aplicando o teorema das cordas aos círculos circunscritos aos triângulos ABC e AEF, em relação aos pares de cordas AM e BC, AM e EF, concluímos que $\overline{BD} \cdot \overline{CD} = \overline{ED} \cdot \overline{EF}$. Portanto, novamente pelo teorema das cordas, o quadrilátero $BFCE$ é inscritível. Mas, como M pertence às mediatrizes dos segmentos BC e EF, segue que M é o centro do círculo circunscrito a tal quadrilátero; em particular, temos $\overline{BM} = \overline{FM}$. A coincidência dos incentros dos triângulos ABC e AEF segue, agora, da proposição 3.38. Por fim, para estabelecer a afirmação recíproca, basta reverter os passos do argumento acima.

Seção 5.1

3. Comece utilizando a congruência dos triângulos ADF e DCE para concluir que $D\widehat{G}F = 90°$. Em seguida, aplique as relações métricas em triângulos retângulos – cf. proposição 4.9 – para calcular $\overline{DG}$ e $\overline{GF}$.

4. Para o item (a), aplique o teorema de Pitágoras ao triângulo ABM, onde M é o ponto médio de BC.

5. Pelo item (a) do problema anterior, a altura de CDE em relação ao lado CD mede $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que $A(CDE) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Pelo item (b) do problema anterior, temos $A(ABE) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Mostre, agora, que $AED \equiv BEC$.

6. Inicialmente, mostre que $ABE \equiv ADF$. Agora, faça $\overline{BE} = x$ para obter $\overline{CE} = \overline{CF} = 1-x$; em seguida, aplique o teorema de Pitágoras aos triângulos ABE e CEF para obter $\sqrt{1+x^2} = \overline{AE} = \overline{EF} = (1-x)\sqrt{2}$. A partir daí, calcule x e aplique o resultado do problema 4.

7. Para o item (a), sendo a o comprimento do lado e S o valor da área de ABC, conclua que suas alturas medem $\frac{2S}{a}$. Para o item (b), sejam P um ponto no interior de ABC e x, y e z, respectivamente, as distâncias de P aos lados BC, AC e AB. A igualdade $A(ABC) = A(BCP) + A(ACP) + A(ABP)$ nos dá $x + y + z = \frac{2S}{a}$.

8. Em relação a $A_1A_2 \ldots A_n$, sejam O o centro, l o comprimento do lado e a a distância comum de O aos lados. Seja, ainda, C_i o pé da perpendicular baixada de P à reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ($A_{n+1} = A_1$). A partir das igualdades

$$\sum_{i=1}^{n} A(OA_iA_{i+1}) = A(A_1A_2 \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} A(PA_iA_{i+1}),$$

obtemos $n \cdot \frac{la}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{l \cdot \overline{PC_i}}{2}$ e, daí, $\overline{PC_1} + \overline{PC_2} + \cdots + \overline{PC_n} = na$.

9. Denotando por S a área de ABC, temos $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$ e $h_c = \frac{2S}{c}$. Portanto, $a + h_a = b + h_b = c + h_c$ se, e só se, $a + \frac{2S}{a} = b + \frac{2S}{b} = c + \frac{2S}{c}$. Agora, $a + \frac{2S}{a} = b + \frac{2S}{b}$ equivale a $(a-b)(2S - ab) = 0$ ou, ainda, a $a = b$ ou $ab = 2S$; analogamente, $a + \frac{2S}{a} = c + \frac{2S}{c}$ se, e só se, $a = c$ ou $ac = 2S$. Se $c \neq a, b$, então $ac = 2S = bc$, de sorte que $a = b$. Então, $\frac{ac}{2} = S = \frac{ah_a}{2}$, de forma que $c = h_a$ e, daí, ABC é retângulo em B; portanto, $b = \overline{AC} > \overline{BC} = a$, o que é uma contradição.

10. Podemos supor, sem perda de generalidade, que ABC é retângulo em A. Como BB' e CC' se intersectam em seus respectivos pontos médios, $BCB'C'$ é um paralelogramo. Como $\overleftrightarrow{AA'} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, temos $\overleftrightarrow{AA'} \perp \overleftrightarrow{B'C'}$. Marque os pontos H e H', respectivamente de interseção de $\overleftrightarrow{AA'}$ com BC e $B'C'$. Uma vez que $ABC \equiv A'BC \equiv AB'C'$, temos $\overline{A'H'} = \overline{A'H} + \overline{AH} + \overline{AH'} = 3\overline{AH}$. Portanto, $A(A'B'C') = \frac{1}{2}\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'} = \frac{3}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = 3A(ABC) = 3\text{m}^2$.

11. Sejam M, N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados BC, AC e AB. Use o teorema da base média para concluir que os triângulos ANP, BMP, CMN e MNP são congruentes. Em seguida, aplique o postulado 1 do cálculo de áreas.

12. Analisemos o caso em que $ABCD$ é convexo, deixando o caso em que $ABCD$ é não convexo a cargo do leitor. Pela sugestão dada ao problema anterior, temos que $A(DPQ) = \frac{1}{4}A(ACD)$ e $A(BMN) = \frac{1}{4}A(ABC)$; portanto,

$$A(DPQ) + A(BMN) = \frac{1}{4}A(ACD) + \frac{1}{4}A(ABC) = \frac{1}{4}A(ABCD).$$

Conclua, analogamente, que $A(AMQ) + A(CNP) = \frac{1}{4}A(ABCD)$ e, em seguida, calcule $A(MNPQ)$ como a diferença entre as áreas de $ABCD$ e da união dos triângulos AMQ, BMN, CNP e DPQ.

13. Sejam $ABCD$ e $OMNP$ os dois quadrados, sendo O o centro de $ABCD$. Observe, inicialmente, que $\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 = \overline{OM}$. Há, agora, dois casos essencialmente distintos a considerar:

(i) OM intersecta BC em um ponto $Q \neq B, C$: então OP intersecta CD em um ponto $R \neq C, D$, e a porção do plano comum aos dois quadrados é o quadrilátero $OQCR$. Agora, é imediato verificar que $D\widehat{O}R = C\widehat{O}Q$ e, daí, que $OQC \equiv ORD$ por ALA. Portanto, $A(OQCR) = A(OQC) + A(OCR) = A(ODR) + A(OCR) = A(OCD) = \frac{1}{4}A(ABCD) = \frac{1}{4}$. (ii) OM passa por C: então OP passa por D e, de saída, a porção comum aos dois quadrados é o triângulo OCD.

14. Sejam K, L, M e N, respectivamente, os pontos de interseção de $\overleftrightarrow{BJ}$ e DE, $\overleftrightarrow{CI}$ e FG, $\overleftrightarrow{AH}$ e BC, $\overleftrightarrow{AH}$ e IJ. É imediato que $BDK \equiv AEH$ e $CFL \equiv AGH$ e, daí, $A(ABDE) = A(ABKH)$ e $A(ACFG) = A(ACLH)$. Agora, observe que os paralelogramos $ABKH$ e $MBJN$ têm bases AH e MN iguais e alturas correspondentes a tais bases também iguais, de sorte que $A(ABKH) = A(MBJN)$; analogamente, $A(ACLG) = A(MCIN)$. Portanto, temos $A(ABDE) + A(ACFG) = A(ABKH) + A(ACLH) = A(MBJN) + A(MCIN) = A(BCIJ)$.

15. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo de diagonais AC e BD concorrentes em O. Sejam, ainda, P e Q, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas dos vértices B e D à diagonal AC. A condição $A(ABC) = A(ACD)$ fornece a igualdade $\overline{BP} = \overline{DQ}$. Mas, como $BOP \sim DOQ$ por AA, temos $\frac{\overline{BO}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{DQ}} = 1$, de maneira que O é o ponto médio de BD. Analogamente, a condição $A(ABD) = A(CBD)$ garante que O é o ponto médio de AC. Portanto, como as diagonais de $ABCD$ intersectam-se em seus respectivos pontos médios, $ABCD$ é um paralelogramo.

16. Para o item (b), faça $A(BFP) = x$ e $A(AEP) = y$. Segue de (a) que $\frac{A(ABD)}{A(ACD)} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{A(BPD)}{A(CPD)}$, de sorte que $\frac{84+x+40}{y+35+30} = \frac{40}{30}$. Conclua, de maneira análoga, que $\frac{84+y+35}{x+40+30} = \frac{84}{x}$ e, em seguida, resolva o sistema de equações assim obtido.

17 Para a primeira parte, segue do item (a) do problema anterior que

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{A(ABA')}{A(ACA')} = \frac{A(BPA')}{A(CPA')}.$$

Utilize, agora, o resultado do problema 1.1.1 do volume 1.

18. Sejam $\mathcal{P} = A_1A_2\ldots, A_n$, r a reta em questão, $\Gamma(O; R)$ o círculo inscrito em $\mathcal{P}$ e d a distância de O a r. Suponha, ademais, que r intersecta A_1A_2 em X e A_iA_{i+1} em Y, e sejam $\overline{XA_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_iY} = \overline{YA_{i+1}} + \overline{A_{i+1}A_{i+2}} + \cdots + \overline{A_nA_1} + \overline{A_1X} = a$. Por fim, suponha que $O \in YA_{i+1}A_{i+2}\ldots A_nA_1X$. Então,

$$\begin{aligned}
A(XA_2\ldots A_iY) &= A(XA_2\ldots A_iYO) - A(XOY)\\
&= A(XOA_2) + A(A_2OA_3) + \cdots + A(A_iOY)\\
&\quad - A(XOY)\\
&= \frac{R}{2}(\overline{XA_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_iY}) - \frac{d}{2}\overline{XY}\\
&= \frac{1}{2}(aR - d\overline{XY})
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
A(YA_{i+1}A_{i+2}\ldots A_nA_1X) &= A(YA_{i+1}A_{i+2}\ldots A_nA_1XO) + A(XOY)\\
&= \frac{1}{2}(aR + d\overline{XY}).
\end{aligned}$$

Portanto, $A(XA_2\ldots A_iY) = A(YA_{i+1}A_{i+2}\ldots A_nA_1X)$ se, e só se, $aR - d\overline{XY} = aR + d\overline{XY}$, i.e., se, e só se, $d = 0$. Mas isso é o mesmo que pedir que $O \in \overleftrightarrow{XY} = r$.

19. Seja $ABCD$ o quadrilátero, AC a diagonal e $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $\overline{AC} = d$, de sorte que $a + b + d = 16$. Se h_1 e h_2 denotam respectivamente as alturas dos triângulos ABC e ACD relativas a AC, então $d(h_1 + h_2) = 64$; por outro lado, pela desigualdade entre as médias temos $d(h_1 + h_2) \leq d(a + b) \leq \frac{1}{4}(d + a + b)^2$.

Seção 5.2

1. Sendo a e h, respectivamente, os comprimentos da base e da altura do triângulo, e l o comprimento do lado do quadrado, devemos ter $l^2 = \frac{ah}{2}$. Basta, portanto, construir o segmento de comprimento $l = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot h}$, o que pode ser feito com o auxílio do problema 19, página 171.

2. Suponha, sem perda de generalidade, que AC e BD são as diagonais de $ABCD$. Há três casos essencialmente distintos a considerar: (i) $E \in AB$ e $F, G \in BC$: então $A(EFG) \leq A(ABC) = \frac{1}{2}A(ABCD)$; (ii) $E \in AD$ e $F, G \in BC$: então $A(EFG) \leq A(EBC) = A(ABC) = \frac{1}{2}A(ABCD)$; (iii) $E \in AB$, $F \in BC$ e $G \in CD$: sendo H e L, respectivamente, as interseções de EG e AD com a paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ traçada por F, temos pelo caso (ii) que $A(EFG) = A(EFH) + A(HFG) \leq \frac{1}{2}A(ABFL) + \frac{1}{2}A(LFCD) = \frac{1}{2}A(ABCD)$.

3. O movimento permitido às formigas mantém a área do triângulo que tem por vértices suas posições. Por outro lado, a Ã¡rea do triângulo que tem por vértices as posições iniciais das formigas é o dobro da área do triângulo que tem por vértices os pontos médios de três dos lados do retângulo.

4. Para o item (a), sejam N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados AC e AB. Use o teorema da base média para concluir que a altura de ANM relativa a MN é igual à metade da altura de ABC relativa a BC; em seguida, mostre que $A(AMN) = \frac{1}{4}A(ABC)$. Para o item (b), sejam G o baricentro de ABC e M o ponto médio do lado BC. Marque, sobre $\overrightarrow{AM}$, o ponto D tal que M é o ponto médio de DG. Então conclua, sucessivamente, que $BDCG$ é um paralelogramo e que CDG é um triângulo cujos lados medem $\frac{2}{3}$ dos comprimentos das medianas de ABC. Por fim, mostre diretamente que $A(CDG) = A(BCG) = \frac{1}{3}A(ABC)$ e invoque o resultado da proposição 5.10 para concluir que $A(CDG) = \frac{4}{9}A(DEF)$.

5. Veja que $A(ABC) = A(ABF)$, $A(CDE) = A(BCD)$ e $A(AEF) = A(DEF)$.

6. Denotando por E o pé da perpendicular baixada de C a $\overleftrightarrow{AB}$, temos $\overline{CE} = 5$cm; aplique o teorema de Pitágoras ao triângulo BCE para obter $\overline{CE} = 12$cm e, a partir daí, $A(ABCD) = 186\text{cm}^2$. Para o que falta, denotando por x a distância do vértice A à reta $\overleftrightarrow{BC}$, temos $186 = A(ABCD) = A(ACD) + A(ABC) = 78 + \frac{13x}{2}$, de sorte que $x = 12$cm.

7. Em um tal trapézio $ABCD$, de bases AB e C e lados não paralelos AD e BC, devemos ter $\overline{AB} = 2$ e $\overline{CD} = 1$ (ou vice-versa) e $\overline{AD} = \overline{BC} = 1$. Sendo E o pé da perpendicular baixada de D a $\overleftrightarrow{AB}$, temos $\overline{AE} = \frac{1}{2}$ e, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto, $A(ABCD) = \frac{1}{2}(2+1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Agora, segue do problema 4, página 227, que a área de um triângulo equilátero de lado n é igual a $\frac{n^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto, para que seja possível particionar um triângulo equilátero de lado n em trapézios de lados medindo 1, 1, 1 e 2, o quociente entre suas áreas, $\frac{n^2}{3}$, deve ser um inteiro; assim, 3 deve dividir n. Por fim, para ver que tal condição também é suficiente, seja $n = 3k$, com $k \in \mathbb{N}$, e particione o triângulo equilátero de lado n em triângulos equiláteros de lado 3. Em seguida, tome um desses triângulos de lado 3, digamos ABC, e marque seu centro O, juntamente com os pontos $A' \in BC$, $B' \in AC$ e $C' \in AB$ tais que $\overline{A'C} = \overline{B'A} = \overline{C'B} = 2$; os trapézios $A'CB'O$, $B'AC'O$ e $C'BA'O$ têm lados de comprimentos 1, 1, 1 e 2 e particionam ABC.

8. Sendo F o ponto de interseção de $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BE}$, temos $BCE \equiv FDE$ por ALA, de sorte que E é o ponto médio de BF. Portanto, ABF tem o dobro da área de ABE e segue que

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ABED) + A(BCE) = A(ABED) + A(DEF) \\ &= A(ABF) = 2A(ABE) = 720\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Alternativamente, sejam $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$ e h o comprimento da altura de $ABCD$. Denotando por G o ponto médio de AB, segue que

os triângulos BEG e AEG têm altura $\frac{h}{2}$ em relação a EG, de sorte que

$$\begin{aligned} A(ABE) &= A(AEG) + A(BEG) = \frac{1}{2}\overline{EG}\cdot\frac{h}{2} + \frac{1}{2}\overline{EG}\cdot\frac{h}{2} \\ &= \overline{EG}\cdot\frac{h}{2} = \frac{(a+b)h}{4} = \frac{1}{2}A(ABCD). \end{aligned}$$

9. Sejam a e b, respectivamente, os comprimentos das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e h o comprimento da altura de $ABCD$. Sejam, ainda, h_1 e h_2, respectivamente, os comprimentos das alturas dos triângulos ABE e CDE em relação aos lados AB e CD, tambÃ©m respectivamente. Então $h_1 + h_2 = h$ e, pela semelhança $ABE \sim CDE$, temos $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$, de sorte que $h_1 = \frac{ah}{a+b}$ e $h_2 = \frac{bh}{a+b}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{A(ABE)} + \sqrt{A(CDE)} &= \sqrt{\frac{a^2h}{2(a+b)}} + \sqrt{\frac{b^2h}{2(a+b)}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b)h}{2}} = \sqrt{A(ABCD)}. \end{aligned}$$

10. Sejam D, E, F, G, H e I os pontos em que as paralelas aos lados de ABC, traçadas por P, intersectam os lados de ABC, com $G \in BC$, $H \in BG$, $E \in AC$, $I \in AE$, $F \in AB$ e $D \in BF$. Como $BHPD$ e $CEPG$ são paralelogramos, temos $\overline{DP} = \overline{BH}$ e $\overline{EP} = \overline{CG}$. Portanto, pela proposição 5.10, temos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{EP}}{\overline{BC}} \\ &= \sqrt{\frac{A(DFP)}{A(ABC)}} + \sqrt{\frac{A(GHP)}{A(ABC)}} + \sqrt{\frac{A(EIP)}{A(ABC)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A(ABC)}} + \frac{2}{\sqrt{A(ABC)}} + \frac{3}{\sqrt{A(ABC)}}, \end{aligned}$$

de sorte que $A(ABC) = 36\text{cm}^2$.

11. Segue da proposição 5.12 que $\frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{pr}$. Utilizando esse mesmo resultado, escreva as relações análogas envolvendo r_b e r_c e, em seguida, some as três igualdades obtidas.

12. Sendo ABC o triângulo e H_a, H_b e H_c os pés das alturas baixadas a partir de A, B e C, respectivamente, mostre que $AH_bH_c \sim ABC$ e, portanto, que a mediana de AH_bH_c relativa ao lado H_bH_c é a simediana de ABC relativa ao lado BC.

13. Adapte parcialmente o argumento delineado na sugestão ao problema anterior, observando que, em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é a simediana relativa à mesma.

14. Sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e x e y as distâncias de P respectivamente a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. A proposição 5.15 garante que AP é simediana se, e só se, $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$. Agora, observe que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{A(ABP)}{A(ACP)} = \frac{cx}{by},$$

relação que fornece a caracterização desejada.

15. Pelas propriedades do baricentro, a distância de G a BC é um terço da altura relativa a A. Use, agora, a igualdade $\frac{ah}{2} = pr$ para concluir que tal distância coincide com aquela de I a BC.

16. Adapte a prova da versão do teorema de Carnot apresentada no texto ao caso sob consideração.

17. Aplique o teorema de Carnot e sua generalização, estabelecida no problema anterior, a cada um dos três triângulos em que $ABCDE$ ficou particionado.

18. Sendo $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{T\}$, aplique o teorema de Desargues 4.23 aos pares de triângulos DMN e KLB, CLM e AKN para mostrar que $\overleftrightarrow{QT} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PT} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, de sorte que os pontos P, Q e T são colineares. Em seguida, use semelhança de triângulos para mostrar que, sendo h a altura do trapézio e h' a distância do ponto O à reta $\overleftrightarrow{PQ}$, temos $h' = \frac{2hk}{k^2-1}$; conclua, também usando semelhanças, que

$$\overline{QT} = \frac{\overline{AB}(k\cdot\overline{DO} + \overline{AO})}{(k-1)(\overline{AO} + \overline{BO})} \quad \text{e} \quad \overline{PT} = \frac{\overline{AB}(k\cdot\overline{CO} + \overline{BO})}{(k-1)(\overline{AO} + \overline{BO})},$$

de sorte que $\overline{PQ} = \frac{2 \cdot \overline{AB}}{k-1}$.

Seção 5.3

1. Sejam $\mathcal{P} = A_1A_2 \ldots A_n$, $\mathcal{Q} = A_1'A_2' \ldots A_n'$ e O e O', respectivamente, os centros de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Aplique o resultado da proposição 5.10 a cada um dos pares de triângulos OA_iA_{i+1} e $O'A_i'A_{i+1}'$, com a convenção de que $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+1}' = A_1'$.

2. Sendo l o comprimento do lado do polígono desejado, aplique o resultado do problema anterior para concluir que $\frac{5^2}{l^2} + \frac{12^2}{l^2} = 1$.

3. Sendo $\mathcal{P}_R$ e $\mathcal{Q}_R$ polígonos regulares de mesmo número de lados, o primeiro inscrito e o segundo circunscrito a um círculo Γ de raio R, temos $A(\mathcal{P}_R) \leq A(\Gamma) \leq A(\mathcal{Q}_R)$ e $A(\mathcal{P}_1) \leq \pi \leq A(\mathcal{Q}_1)$. Aplique, agora, o resultado do problema 1 para concluir que $A(\mathcal{P}_R) = A(\mathcal{P}_1)R^2$ e $A(\mathcal{Q}_R) = A(\mathcal{Q}_1)R^2$.

4. Nas notações da figura 5.14, obtemos

$$\begin{aligned} l_{2n}^2 &= \overline{A_iD_i}^2 = \overline{A_iC_i}^2 + \overline{C_iD_i}^2 = \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + (R - a_n)^2 \\ &= \frac{l_n^2}{4} + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{l_n^2}{4}}\right)^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}. \end{aligned}$$

   O resto segue daí, juntamente com o fato de que $l_4 = R\sqrt{2}$.

6. Siga passos análogos aos da discussão que levou a (5.10).

7. Sejam R, R_1 e R_2 os raios de Γ, Γ_1 e Γ_2, respectivamente. Segue de $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ que $R = R_1 + R_2$ e, daí, que $S = \frac{\pi}{2}(R^2 - R_1^2 - R_2^2) = \pi R_1R_2$. Por outro lado, como $A\widehat{D}C = 90°$, as relações métricas em triângulos retângulos fornecem $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4R_1R_2$, de sorte que $\frac{\overline{BD}^2}{S} = \frac{4}{\pi}$.

8. Seja O o ponto médio da hipotenusa BC de ABC ou, o que é o mesmo, o centro de Γ. Sejam, ainda $A\widehat{O}B = \alpha$, de sorte que $A\widehat{O}C = 180° - \alpha$, e $\overline{AB} = 2R_1$, $\overline{AC} = 2R_2$ e $\overline{BC} = 2R$. A área da porção de Γ_1 exterior a ABC é igual a $\frac{1}{2}\pi R_1^2 - \left(\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi R^2 - A(AOB)\right)$, ao passo que a área da porção de Γ_2 exterior a ABC é igual a $\frac{1}{2}\pi R_2^2 - \left(\frac{180° - \alpha}{360°} \cdot \pi R^2 - A(AOC)\right)$. Portanto, a soma das áreas de tais porções de Γ_1 e Γ_2 vale

$$\frac{1}{2} \cdot \pi(R_1^2 + R_2^2) - \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 + A(AOB) + A(AOC) = A(ABC),$$

   uma vez que, pelo teorema de Pitágoras, $R_1^2 + R_2^2 = R^2$.

9. Se ABC for retângulo ou obtusângulo, então nada há a fazer, uma vez que ABC está contido em um semicírculo de Γ. Se ABC for acutângulo, de ortocentro H, sejam A', B' e C', respectivamente, os outros pontos de interseção das semirretas $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BH}$ e $\overrightarrow{CH}$ com Γ; o resultado do problema 6, página 135, garante que

$$\begin{aligned} A(\Gamma) &> A(AC'BA'CB'A) \\ &= (A(ABH) + A(ABC')) + (A(ACH) + A(ACB')) \\ &\quad + (A(BCH) + A(BCA')) \\ &= 2A(ABH) + 2A(ACH) + 2A(BCH) = 2A(ABC). \end{aligned}$$

10. Se $\alpha = 360° \cdot \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $m < n$, defina o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ como sendo igual ao supremo dos comprimentos das linhas poligonais $A_1A_2 \ldots A_{km}A_{km+1}$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $A_1A_2 \ldots A_{kn}$ é um polígono regular de kn lados, inscrito em Γ e tal que $A_1 = A$, $A_{km+1} = B$. Mostre que

$$\frac{\ell(A_1A_2 \ldots A_{km}A_{km+1})}{\ell(A_1A_2 \ldots A_{kn-1}A_{kn})} = \frac{m}{n}$$

   e conclua, a partir daí e com o auxílio da discussão que mostrou a boa definição do comprimento de um círculo, que $\ell(\overset{\frown}{AB}) = \frac{m}{n} \cdot 2\pi R$. Se $\alpha = 360° \cdot x$, com x irracional, use o resultado do problema 3 da seção 1.5 do volume 1 para garantir a existência de racionais $0 <$

$r_1 < r_2 < \cdots < x$, tais que $\sup\{r_1, r_2, \ldots\} = x$. Em seguida, defina o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ como o supremo dos comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{AB_n}$, onde $B_n \in \overset{\frown}{AB}$ e $A\widehat{O}B_n = \alpha_n$, tal que $\alpha_n = 360° \cdot r_n$. Por fim, conclua que $\ell(\overset{\frown}{AB}) = x \cdot 2\pi R$.

11. Em uma hora, o ponto de contato das duas rodas dentadas percorreu uma distância igual a $1000 \cdot 2\pi R = 2000\pi R$, o que corresponde a $\frac{2000\pi R}{2\pi \cdot 4R} = 250$ voltas da roda dentada maior. Portanto, em meia hora a roda dentada maior girou $\frac{1}{2} \cdot 250 = 125$ vezes.

12. Comece calculando a soma dos comprimentos dos lados do triângulo equilátero e do quadrado inscritos num círculo de raio R.

Seção 6.1

3. Se $A(a, b)$ e $B(c, d)$ são pontos distintos, tais que $\overline{AP} = \overline{BP}$, use a fórmula da a distância entre dois pontos para concluir que $(a - c)\left(a + c - \frac{2}{3}\right) + b^2 - d^2 = 2(b - d)\sqrt{2}$. Agora, supondo que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, use a irracionalidade de $\sqrt{2}$ para concluir que $b = d$ e, então, que $a = c$. Para o que falta, observe que um círculo de centro P e raio suficientemente pequeno não conterá ponto algum de coordenadas inteiras em seu interior; em seguida, use a primeira parte do argumento acima para concluir que, ao aumentarmos progressivamente o raio de um tal círculo, os pontos de coordenadas inteiras *entrarão* um a um no disco correspondente.

4. De acordo com o problema anterior, existe um círculo $\Gamma(O; R)$ no plano que passa por exatamente um ponto de coordenadas inteiras e contém exatamente 2012 pontos de coordenadas inteiras em seu interior. Se P é o ponto de coordenadas inteiras no interior de Γ tal que $r = \overline{OP}$ é o maior possível, mostre que existem infinitos polígonos regulares centrados em O, de números de lados dois a dois distintos e contidos na coroa circular de centro O e raios r e R.

5. Suponha, sem perda de generalidade, que $A(0, y)$, $B(x_1, 0)$ e $C(x_2, 0)$, de sorte que, pela fórmula da distância entre dois pontos, $\overline{AB} = \sqrt{x_1^2 + y^2}$, $\overline{AC} = \sqrt{x_2^2 + y^2}$ e $\overline{BC} = |x_1 - x_2|$. Em seguida, obtenha as coordenadas do ponto médio M_a de BC e aplique a fórmula da distância entre dois pontos mais uma vez para calcular $m_a = \overline{AM_a}$.

6. Aplique a fórmula do problema anterior aos triângulos BDM, ABC e ACD. Em seguida, combine adequadamente as fórmulas assim obtidas.

7. Fixados $1 \leq j < k \leq m$, temos $\overline{A_iB_j}^2 - \overline{A_iB_k}^2 = j - k$, para $1 \leq i \leq n$. Portanto, pela proposição 6.8, os pontos A_1, A_2, ..., A_n pertencem a uma reta r, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{B_jB_k}$. Mas, como os índices j e k do argumento acima foram escolhidos arbitrariamente, segue que os pontos B_1, B_2, ..., B_m pertencem a uma reta s, perpendicular à reta r.

8. Sejam $\Gamma_i(O_i; R_i)$, para $i = 1, 2$, e O o centro de um círculo de raio R, que intersecta Γ_1 e Γ_2 segundo diâmetros. Mostre que $\overline{OO_i}^2 = R^2 - R_i^2$ e conclua, a partir daí, que $\overline{OO_1}^2 - \overline{OO_2}^2 = R_2^2 - R_1^2$. Em seguida, use o resultado da proposição 6.8 para concluir que o LG procurado é uma reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$, e examine a prova do teorema 4.34 para concluir que tal reta é a simétrica do eixo radical de Γ_1 e Γ_2 em relação ao ponto médio do segmento O_1O_2.

9. Construa um retângulo $ABCD$, de lados paralelos aos eixos coordenados e tendo os pontos A_1, A_2 e A_3 sobre seus lados. Em seguida, calcule a área de $A_1A_2A_3$ como a diferença entre a área de $ABCD$ e a soma das áreas de três triângulos retângulos, de lados paralelos aos eixos.

10. Argumente por contradição, utilizando o resultado do problema anterior.

12. Para o item (c), observe inicialmente que a soma dos ângulos dos triângulos fundamentais nos quais $\mathcal{P}$ fica particionado é igual à soma

das contribuições relativas aos vértices de $\mathcal{P}$, aos $B - n$ pontos de coordenadas inteiras sobre os lados de $\mathcal{P}$ e que não são vértices, bem como aos I pontos de coordenadas inteiras situados no interior de $\mathcal{P}$. Em seguida, note que, para cada um de tais tipos de pontos, as somas de tais contribuições são respectivamente iguais à medida de um ângulo interno, a $180°$ e a $360°$.

13. Mostre que os pontos $A_k(k, k^2)$, para $1 \leq k \leq n$, satisfazem as condições do enunciado.

Seção 6.2

1. A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta de equação $y = x$. A reta que passa pelos pontos A e B tem equaÃ§Ã£o $x + y = a + b$, de sorte que é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares, a qual intersecta no ponto $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$. Por fim, é imediato verificar que $\overline{AC} = \overline{BC}$.

4. Uma possibilidade é utilizar o método sintético para obter as coordenadas de B. Alternativamente, observe que a equação da reta $\overleftrightarrow{OA}$ é $y = \frac{b}{a}x$, de sorte que a equação da reta $\overleftrightarrow{OB}$ é $y = -\frac{a}{b}x$. Em seguida, impondo que $\overline{OB} = \overline{OA}$, obtemos $x = \pm b$ e, daí, $y = \mp a$. Mas, como B pertence ao segundo quadrante, a única possibilidade é que $x = -b$, $y = a$.

5. Aplique os resultados das proposições 6.13 e 6.14, bem como a observação 6.10.

6. Como $x_0, y_0 \neq 0$, tal reta não passa pela origem. Portanto, a observação 6.10 (com $k = -\frac{1}{c}$) garante que podemos escrever sua equação na forma $ax + by - 1 = 0$. Agora, impondo sucessivamente que $(x_0, 0)$ e $(0, y_0)$ pertençam à reta, obtemos $a = \frac{1}{x_0}$ e $b = \frac{1}{y_0}$.

7. Considere separadamente os casos $x \geq a$ e $y \geq b$, $x \geq a$ e $y < b$, $x < a$ e $y \geq b$, $x < a$ e $y < b$ para concluir que a região em questão consiste em um quadrado de centro (a, b), diagonais paralelas aos eixos coordenados e lado de comprimento $c\sqrt{2}$.

8. Elabore um pouco mais a discussão da prova da proposição 6.1.

9. Para o item (b) – a prova do item (a) é análoga – suponha, inicialmente, P, Q e R colineares; então, pelo problema anterior, existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $R = (1 - u)P + uQ$. Substitua, nessa igualdade, as expressões (6.6) para P, Q e R e analise a igualdade assim obtida Reciprocamente, suponha que a igualdade do item (b) é satisfeita e seja $R' \in \overleftrightarrow{AB}$ o ponto tal que P, Q e R' são colineares, com $R' = (1 - u')A + u'B$. Segue de (b) e da primeira parte acima que
$$\frac{u'}{1-u'} = -\frac{(1-s)(1-t)}{st} = \frac{u}{1-u}$$
e, daí, $u = u'$ ou, ainda, $R = R'$.

10. Use as descrições paramétricas de P e de Q para escrever a condição $\frac{BP}{PC} = -\frac{BQ}{QC}$.

Seção 6.3

1. Se $P(x, y)$, mostre que o problema em questão equivale a minimizarmos $f(x) + g(y)$, para certas funções de segundo grau f e g. Em seguida, aplique a teoria elementar de máximos e mínimos de funções quadráticas (cf., por exemplo, a proposição 1.25 do volume 3.

2. Quando o valor de c for o maior possível, a reta r será tangente ao círculo Γ, de forma que o sistema de equações
$$\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$
terá um único par ordenado solução. Por outro lado, substituindo $x = \frac{c-by}{a}$ na segunda equação, obtemos a equação de segundo grau

$(a^2+b^2)y^2 - 2bcy + (c^2-a^2) = 0$, e o sistema acima terá soluções se, e só se, $4b^2c^2 - 4(a^2+b^2)(c^2-a^2) \geq 0$. Tal condição, por sua vez, equivale a $|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$, de forma que o maior valor possível para c é $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Para o que falta, observe que, sendo (x_0, y_0) um ponto comum qualquer de r e Γ, e $u = kx_0$, $v = ky_0$, temos

$$|au+bv| = |k||ax_0+by_0| = |k|c \leq |k|\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{u^2+v^2}\sqrt{a^2+b^2},$$

uma vez que $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

3. Fixe um sistema Cartesiano tal que $\Gamma(O;R)$ e $A(a,0)$, com $O(0,0)$ e $a > R$. Em seguida, mostre que a equação da reta r em um tal sistema tem a forma $y = m(x-a)$, para um certo $m \in \mathbb{R}$, e imponha que as soluções do sistema formado pelas equações de Γ e r sejam $B(x_0, y_0)$ e $P(x_1, y_1)$, com $x_0 + a = 2x_1$ e $y_0 = 2y_1$.

4. Adapte a demonstração da proposição 6.8 ao presente caso para concluir que o LG procurado é o conjunto vazio, caso $k\sqrt{2} < \overline{AB}$, o ponto médio do segmento AB, caso $k\sqrt{2} = \overline{AB}$, ou o círculo de centro no ponto médio de AB e raio $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - \overline{AB}^2}$, caso $k\sqrt{2} > \overline{AB}$.

5. Nas notações do enunciado daquele resultado, escolha um sistema Cartesiano de tal forma que $B(0,0)$ e $C(a,0)$. Em seguida, faça $A(x,y)$ e escreva a condição $\overline{AB} = k \cdot \overline{AC}$ em coordenadas.

6. Escolha um sistema Cartesiano em relação ao qual tenhamos $O(0,0)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ e $C(x_3,y_3)$, de sorte que $x_i^2 + y_i^2 = R^2$ para $1 \leq i \leq 3$. Em seguida, usando o exemplo 6.4, escreva as coordenadas de G e calcule ambos os membros da igualdade desejada.

7. Para o item (a), a fórmula (6.4) para a distância entre dois pontos

garante que

$$\begin{aligned}
& \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\Rightarrow\ & (x+c)^2+y^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \\
\Leftrightarrow\ & a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \\
\Rightarrow\ & a^2[(x-c)^2+y^2] = (a^2-cx)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \\
\Leftrightarrow\ & b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Concluímos, assim, que todo ponto P que satisfaz a relação $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ está sobre a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Reciprocamente, ao tomarmos um ponto $P(x,y)$ sobre tal elipse, concluiremos que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ se formos capazes de mostrar que, na implica (como já sabemos!) $|x| \leq a$, de maneira que $a^2 - cx \geq a^2 - ca = a(a-c) > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
a^2[(x-c)^2+y^2] = (a^2-cx)^2 \ & \Leftrightarrow\ a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = |a^2-cx| \\
& \Rightarrow\ a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-cx,
\end{aligned}$$

e conseguimos transformar a segunda implicação em equivalência. A fim de garantir que a primeira implicação é uma equivalência, note inicialmente que a igualdade $(x+c)^2+y^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2$ é equivalente a

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = |2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}|.$$

Portanto, se mostrarmos que, estando $P(x,y)$ sobre a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tem-se $2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \geq 0$, seguirá da

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

conforme desejado. Para o que falta, desde que $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ é a distância do ponto P sobre a elipse ao foco F_2, temos $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ menor ou igual que o diâmetro do círculo diretor maior, i.e., $2a$.

Para o item (b), como (6.13) permanece inalterada ao trocarmos x por $-x$ ou y por $-y$, o problema 2, página 281, garante que a cônica é simétrica em relação à reta $y = 0$, a qual é a mediatriz de F_1F_2, e o problema 3, página 281, garante que a cônica é simétrica em relação à reta $x = 0$, a qual coincide com $\overleftrightarrow{F_1F_2}$. Por fim, sendo simétrica em relação à reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ e à sua mediatriz, a cônica deve necessariamente também ser simétrica em relação ao ponto médio de F_1F_2 (alternativamente, basta argumentar como acima, aplicando o resultado do problema 1 da página 269).

8. Para o item (b), utilize o resultado do problema 2, página 269.

9. Analise a equação do item (e) do problema anterior, correspondente ao caso de uma elipse (i.e., com o sinal + entre as parcelas do primeiro membro.

10. Para o item (a), observe que a equação do item (a) do problema 8, com γ no lugar de c, se reduz a $2(x_0-\gamma)x + y^2 = x_0^2 - \gamma^2$ ou, ainda, a

$$x = -\frac{1}{2(x_0-\gamma)}y^2 + \frac{x_0+\gamma}{2}.$$

Lembrando que $p = x_0 - \gamma$ é o parâmetro da parábola, e escrevendo $x_0 + \gamma = p + 2\gamma$, a equação acima para a parábola se torna

$$x = -\frac{1}{2p}y^2 + x_0 + \frac{p}{2} + \gamma. \tag{9.1}$$

A figura 9.1 esboça a parábola de foco $F(\gamma, 0)$, com $\gamma > 0$, e parâmetro p a partir de sua definição, i.e., como o conjunto dos pontos P do plano que equidistam do foco F e da diretriz d.

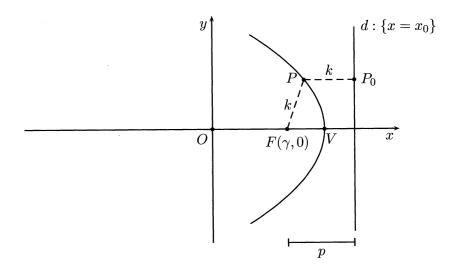



Figura 9.1: parábola de foco $F(\gamma, 0)$ e parâmetro p.

Trocando os papéis dos eixos x e y em (9.1) – o que equivale a uma mudança de sistema de coordenadas – obtemos a equação

$$y = -\frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2} + \gamma$$

para a parábola, tal que o foco é $F(0, \gamma)$ e a diretriz é a reta $d : \{y = x_0\}$. Invertendo o sentido positivo no eixo$-y$, o que equivale a trocar y por $-y$ na equação acima, obtemos para a parábola em questão a equação

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{p}{2} - \gamma, \tag{9.2}$$

para a qual o foco é $F(0, -\gamma)$ e a diretriz é a reta $d : \{y = -x_0\}$. A situação é agora a da figura 9.2. Por fim, transladando o eixo$-y$ para a posição da reta $x = \alpha$, obtemos um novo sistema Cartesiano, tal que as novas coordenadas (x', y') relacionam-se com as antigas por meio das fórmulas $x' = x - \alpha$, $y' = y$ (cf. o resultado do problema

2, página 269). O foco é agora $F(-\alpha, -\gamma)$, mas a diretriz continua sendo a reta $d : \{y = -x_0\}$.

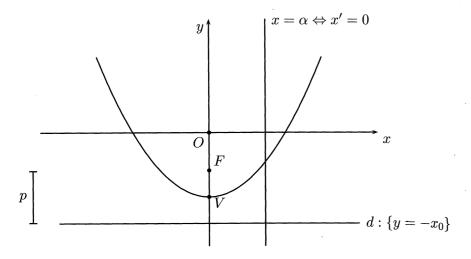



Figura 9.2: a parábola após uma permuta de eixos.

Nesse novo sistema, a equação da parábola é obtida de (9.2) trocando x por $x' + \alpha$. Como o nome da variável é irrelevante, escreveremos, por simplicidade de notação, $x + \alpha$ no lugar de x em (9.2), de modo a obter a equação

$$y = \frac{1}{2p}(x+\alpha)^2 - \left(\frac{p}{2} + \gamma\right) \qquad (9.3)$$
$$= \frac{1}{2p}x^2 + \frac{\alpha}{p}x + \left(\frac{\alpha^2}{2p} - \frac{p}{2} - \gamma\right).$$

Basta, agora, resolver, para p, α e γ, o sistema formado pelas equações $a = \frac{1}{2p}$, $b = \frac{\alpha}{p}$ e $c = \frac{\alpha^2}{2p} - \frac{p}{2} - \gamma$.

Para o item (b), impondo que o sistema formado pelas equações $y = ax^2 + bx + c$ e $y = mx + n$ tenha o ponto (x_0, y_0) como única solução, conclua que a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = mx + n$ tem

$x = x_0$ como única solução, de forma que $x_0 = -\frac{b-m}{2a}$ ou, ainda, $m = 2ax_0 + b$. Em seguida, use o fato de que $y_0 = mx_0 + n$ para obter $n = y_0 - mx_0 = c - ax_0^2$.

11. Use o item (c) do problema anterior para provar que os pés das perpendiculares baixadas do foco da parábola às tangentes são colineares; em seguida, aplique o teorema de Simson-Wallace.

12. Sendo O a origem do sistema Cartesiano subjacente, aplique o teorema das cordas para encontrar o ponto $D(0, y)$ tal que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$.

Seção 7.1

2. A tabela a seguir explicita os sinais requeridos:

	1ºQ	2ºQ	3ºQ	4ºQ
sen	> 0	> 0	< 0	< 0
cos	> 0	< 0	< 0	> 0
tg	> 0	> 0	< 0	< 0

5. A partir de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos em particular que $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ ou, ainda, $\left|\frac{x}{a}\right| \leq 1$. Mas, então, existe $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $\frac{x}{a} = \cos\alpha$ ou, ainda, $x = a\cos\alpha$. Substituindo $x = a\cos\alpha$ na equação da elipse, obtemos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(a\cos\alpha)^2}{a^2} = \operatorname{sen}^2\alpha,$$

de modo que $y = \pm b \operatorname{sen}\alpha$. Se $y = b\operatorname{sen}\alpha$, podemos tomar $\theta = \alpha$. Se $y = b\operatorname{sen}(-\alpha)$, segue de $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ que $x = a\cos(-\alpha)$ e $y = b\operatorname{sen}(-\alpha)$, e podemos tomar $\theta = -\alpha$. Para mostrarmos que tal ângulo é único, suponha que tenhamos também $\theta' \in [0, 2\pi)$ tal que $x = a\cos\theta'$, $y = a\operatorname{sen}\theta'$. Então $\cos\theta = \cos\theta'$, $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta'$ e, como $\theta, \theta' \in [0, 2\pi)$, sabemos que isso implica ser $\theta = \theta'$. O que falta é imediato.

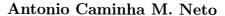
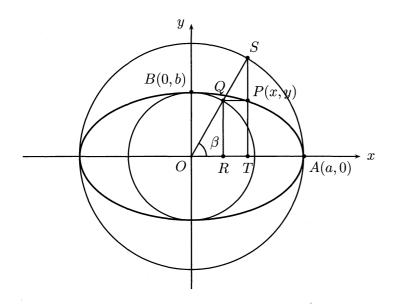



Figura 9.3: equações paramétricas da elipse.

Seção 7.2

1. Desenvolva $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}(a+(-b))$ com o auxílio da parte já demonstrada do item (b) da proposição 7.18. Argumente analogamente para $\operatorname{tg}(a-b)$.

2. Escreva $15^\circ=45^\circ-30^\circ$ e use as fórmulas da proposição 7.18. Alternativamente, escreva faça $a=15^\circ$ no corolário 7.19.

3. Aplique a relação fundamental da trigonometria ao item (a) do corolário 7.19.

4. Observe que $45^\circ=2\cdot 22^\circ 30'$.

6. Use os resultados do problema anterior, em conjunção com aqueles

da proposição 7.22. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}\alpha &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x-\operatorname{sen}\alpha=0\\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)=0.\end{aligned}$$

7. Em cada um dos itens pedidos, escreva A como um seno ou um cosseno, conforme o caso, e aplique os resultados do problema anterior.

8. Adapte, ao caso presente, a sugestão dada ao problema anterior.

9. Pela relação fundamental da trigonometria, é suficiente calcularmos $\cos(x-y)$. Para tanto, observe que

$$b^2+a^2=2+2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y+2\cos x\cos y=2+2\cos(x-y).$$

10. Para a fórmula que falta em (a), escreva $\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b=\operatorname{sen} a+\operatorname{sen}(-b)$ e aplique a fórmula de transformação de uma soma de dois senos em produto; argumente analogamente para deduzir a fórmula para $\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b$. Quanto às fórmulas do item (b), escreva $\cos a\pm\cos b=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\pm\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$ e, em seguida, aplique as fórmulas do item (a).

11. Use o fato de que $-\frac{\pi}{2}<\cos x<\frac{\pi}{2}$ e, em seguida, aplique o resultado do problema 2, página 311.

12. Comece escrevendo $\operatorname{sen}(\cos x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos x\right)$. Em seguida, transforme a diferença $\cos(\operatorname{sen} x)-\operatorname{sen}(\cos x)$ em produto e argumente como na sugestão ao problema anterior.

13. Para a primeira fórmula, multiplique o primeiro membro por $-2\operatorname{sen}\frac{b}{2}$, desfaça o produto $-2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}(a+kb)$ e use a fórmula para somas telescópicas. Para a segunda igualdade, use o fato de que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

14. Faça $a=0$ e $b=\frac{2\pi}{n}$ nas fórmulas do problema anterior.

Seção 7.3

1. Sendo G o pé da perpendicular baixada de de E a AB, aplique o teorema de Pitágoras ao triângulo AEG para calcular $\overline{CE}$ em função do lado do quadrado. Em seguida, calcule $\text{tg}\, E\widehat{A}G$, $\text{tg}\, D\widehat{A}F$ e use a fórmula para a tangente do arco duplo para concluir o que se pede.

2. Denote por θ o ângulo agudo que AP faz com a reta r, e calcule sucessivamente $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ e a área de ABP em termos de r.

3. Mostre que $\text{tg}\,(A\widehat{D}B + A\widehat{E}B) = 1$ usando a fórmula para a tangente da soma; você vai precisar calcular o comprimento da hipotenusa e da altura relativa à mesma.

4. Aplique a lei dos cossenos para calcular a em função de b, c e $A\widehat{C}B$; em seguida, compare a expressão assim obtida com aquela do enunciado.

5. Sejam O o centro do polígono, A e B dois vértices consecutivos do mesmo e M o ponto médio de AB. Como AOB é isósceles de base AB, temos $A\widehat{O}M = \frac{\pi}{n}$ e $OM \perp AB$; portanto, $l_n = 2\overline{AM} = 2R\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}$ e $a_n = \overline{OM} = R\cos\frac{\pi}{n}$. Basta, agora, fazer n sucessivamente igual a 3, 4, 6 e 8, substituindo, em cada caso, os valores já calculados para o seno e o cosseno de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{8}$, respectivamente.

6. Sejam O o centro do polígono, A e B dois vértices consecutivos do mesmo e M o ponto médio de AB. Sejam, ainda, A' e B' os centros dos dois círculos, dentre os n traçados, que têm seus centros respectivamente situados sobre OA e OB, e M' a interseção de OM com $A'B'$. Então $OM' \perp A'B'$, $\overline{A'M'} = r$ e $\overline{OM'} = a_n - r$, onde a_n denota o apótema do polígono (cf. problema anterior). Utilize trignometria no triângulo retângulo $A'OM'$ para calcular r em função de a_n e do ângulo $A'\widehat{O}M' = \frac{\pi}{n}$; em seguida, utilize trignometria no triângulo retângulo AOM para calcular a_n em função de l e do ângulo $A\widehat{O}M = \frac{\pi}{n}$.

7. Aplique o resultado do problema 13, página 170, juntamente com a lei dos cossenos, a um triângulo de lados R, l_{10} e l_{10} – e, obviamente,

ângulos de 36°, 72° e 72°.

8. Aplique a lei dos cossenos a um triângulo de lados l_{10}, R e R.

9. Aplique a lei dos cossenos aos três triângulos formados pelas posições da taverna e de dois dos três mosqueteiros, no instante t após a briga, para calcular, em função de t, as distâncias entre dois quaisquer dos três mosqueteiros. Em seguida, aplique a recíproca do teorema de Pitágoras para concluir o que se pede.

10. Tome o ponto D tal que $ABCD$ seja um paralelogramo, considere Q no interior de ACD tal que APQ seja equilátero. Prove que $\overline{QC} = \overline{PB}$ e, daí, que $Q\widehat{P}C = 60°$ ou $30°$; aplique a lei dos cossenos ao triângulo APC.

11. Comece considerando o hexágono, inscrito no mesmo círculo, mas com lados consecutivos a, b, a, b, a, b. Mostre que tal hexágono tem área igual à do hexágono original, e que seus ângulos internos medem 120°. Em seguida, aplique a lei dos cossenos e o resultado do problema 5, página 331 para o cálculo de l_3.

12. Aplique a fórmula para o comprimento da mediana a cada um dos triângulos BDM, ABC e ACD.

13. A primeira parte segue do problema anterior; quanto à segunda, construa inicialmente, a partir de um triângulo dado ABC, um paralelogramos $ABDC$ tal que AD é igual ao dobro da mediana relativa ao lado BC.

14. Aplique a relação de Stewart ao triângulo AOD e ao segmento OO', onde $D \neq A$ é a interseção de $\overrightarrow{AO'}$ com Γ.

15. Aplique a lei dos senos a cada paracela do primeiro membro.

16. Aplique a lei dos senos a ABC, juntamente com a fórmula para o seno do arco duplo, para calcular $\cos A\widehat{C}B$ em termos de a, b e c; em seguida, substitua o resultado na lei dos cossenos.

17. Sejam r a razão da PA em α, β e γ as medidas dos ângulos opostos aos lados de comprimentos $l-r$, l e $l+r$, respectivamente, de sorte que $\alpha < \beta < \gamma$. Então $\gamma = \alpha + 90^\circ$ e, uma vez que $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, obtemos $\beta = 90^\circ - 2\alpha$. Agora, segue da lei dos senos que

$$\frac{l-r}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{l}{\operatorname{sen}(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{l+r}{\operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)}$$

ou, ainda,

$$\frac{l-r}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{l}{\cos(2\alpha)} = \frac{l+r}{\cos\alpha}.$$

Por fim, considere as igualdades acima como um sistema de equações em r e α para concluir a análise do problema.

18. Tome o ponto D tal que $ABDC$ seja um paralelogramo e aplique a lei dos senos ao triângulo ADC, juntamente com a fórmula para o seno de um arco duplo.

19. Calcule a área do triângulo com o auxílio da fórmula de Herão; em seguida, adapte a ideia da prova da proposição 5.12 para concluir que tal área vale $\frac{27R}{2}$.

20. Considere separadamente os casos $D \in AB$, $D \in AC$ e $D \in BC$; para cada um deles, aplique a lei dos senos ao triângulo DPQ.

21. Se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, use a fórmula do seno para a área de um triângulo e a lei dos cossenos para mostrar que a desigualdade desejada equivale à desigualdade

$$a^2 + b^2 \geq ab(\sqrt{3}\operatorname{sen}\widehat{C} + \cos\widehat{C}).$$

Em seguida, aplique a desigualdade entre as médias, juntamente com a fórmula (7.10).

22. Seja O o centro e R o raio do círculo circunscrito ao polígono. Suponha, sem perda de generalidade, que P pertence à região angular $\angle A_1OA_2$. Se $P\widehat{O}A_2 = \alpha$, então, percorrendo o perímetro do polígono no sentido anti-horário, temos $P\widehat{O}A_{2k} = \alpha + \frac{(k-1)\pi}{n}$. Portanto, segue da Lei dos Cossenos que

$$\begin{aligned}\overline{A_{2k}P}^2 &= \overline{A_{2k}O}^2 + \overline{OP}^2 - 2\,\overline{A_{2k}O}\cdot\overline{OP}\cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\pi}{n}\right)\\ &= R^2 + \overline{OP}^2 - 2R\cdot\overline{OP}\cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

Analogamente, $\overline{A_{2k-1}P}^2 = R^2 + \overline{OP}^2 - 2R\cdot\overline{OP}\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \alpha\right)$, de sorte que

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{A_{2k}P}^2 = \sum_{k=1}^{n}\overline{A_{2k-1}P}^2$$

se, e só se,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \alpha\right).$$

Por fim, para estabelecer esta igualdade, aplique o resultado do problema 13, página 319.

23. Se $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{BD} = \overline{CD} = t$, aplique o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABDC$ para obter $(c+b)t = a\cdot\overline{AD}$. Use, então, a lei dos senos para obter, a partir daí, que

$$\overline{BK} + \overline{CL} = t(\operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C}) = \overline{AD}\cdot\operatorname{sen}\widehat{A} \leq \overline{AD}.$$

24. Se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, use o corolário 7.29 e a lei dos senos para mostrar que $A(AB_2C_1) = \frac{a^3}{4R}$ e

$$A(BA_1A_2C) = \frac{(b+c)^2\operatorname{sen}\widehat{A}}{2} - \frac{abc}{4R} = \frac{a}{4R}(b^2 + bc + c^2),$$

onde R é o raio do círculo circunscrito a ABC. Após encontrar fórmulas análogas para as demais áreas-parcela, some-as para obter

$$A(A_1A_2B_1B_2C_1C_2) = \frac{1}{4R}((a^2+b^2+c^2)(a+b+c) + 4abc).$$

Por fim, aplique a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, uma vez mais em conjunção com o corolário 7.29, para concluir o resultado.

25. Sendo $\theta = A\widehat{B}M$, mostre inicialmente que $\theta = \widehat{C} - \widehat{B}$; em seguida, calcule $\overline{AN}$, $\overline{BN}$ e $\overline{AC}$ em função de $\overline{MN} = x$, $\overline{AB} = c$ e dos ângulos envolvidos, usando a lei dos senos e a trigonometria em triângulos retângulos.

26. Aplique a fórmula (7.16) à igualdade $A(ABC) = A(ABP) + A(ACP)$.

27. Aplique a fórmula do seno para a área de um triângulo, juntamente com a desigualdade entre as médias para dois números.

28. Sendo M o ponto de encontro das diagonais de $ABCD$, temos

$$A(ABCD) = A(ABM) + A(BCM) + A(CDM) + A(DAM);$$

agora, aplique a fórmula do seno para a área de cada um dos quatro triângulos do segundo membro.

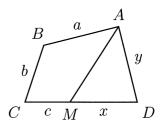
29. Aplique as fórmulas do seno para S, S_1 e S_2 para transformar a desigualdade em questão numa desigualdade envolvendo os comprimentos de AE, BE, CE e DE; em seguida, use a desigualdade entre as médias para dois números.

30. Se $\theta = \angle ADC$, então $\angle ABC = \pi - \theta$ e, daí,

$$\begin{aligned} A(ADM) = A(ABCM) &\Rightarrow A(ABCD) = 2A(ADM) \\ &\Rightarrow (x+c)y\operatorname{sen}\theta + ab\operatorname{sen}(\pi - \theta) \\ &= 2xy\operatorname{sen}\theta \\ &\Rightarrow xy = cy + ab. \end{aligned}$$

Por outro lado, a igualdade dos perímetros nos dá $x + y = a + b + c$. Portanto, segue de (9.4) que

$$xy + y^2 = (x+y)y = (a+b)y + cy = (a+b)y + xy - ab,$$

e, daí, $y^2 - by = ay - ab$ ou, ainda, $(y-a)(y-b) = 0$. Logo, $y = a$ ou $y = b$.

31. Use a fórmula do problema 28, juntamente com a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para dois números.

32. Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos ABC e CDA para o cálculo de $\overline{AC}$, obtenha uma expressão para o cosseno de $A\widehat{B}C$ em função de a, b, c e d; em seguida, calcule, a partir daí, o seno de $A\widehat{B}C$ e a área de $ABCD$ como $A(ABC) + A(CDA)$.

33. Sendo $\alpha = B\widehat{A}D$ e $\beta = A\widehat{B}C$, use a lei dos senos para provar que $\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$. Utilizando a forma do seno para a área de um triângulo, calcule a área de $ABCD$ de duas maneiras distintas para mostrar que $(ad + bc)\operatorname{sen}\alpha = (ab + cd)\operatorname{sen}\beta$.

34. Aplique os teoremas de Ptolomeu e Hiparco para calcular os comprimentos das diagonais de $ABCD$ em termos de a, b, c e d. Em seguida, construa com régua e compasso segmentos tendo os comprimentos calculados.

35. Sejam M o ponto médio do lado BC e $A_1 \neq A$ o ponto em que $\overrightarrow{AM}$ intersecta o círculo circunscrito a ABC. Se $\overline{MA_1} = x$, use o teorema das cordas e o fato de $\overline{AA_1} \leq 2R$ para concluir que $m_a^2 + \frac{a^2}{4m_a} \leq 2R$. Por fim, use a fórmula para o comprimento de m_a para concluir que $\frac{b^2+c^2}{2m_a} \leq 2R$.

36. Se tal fosse possível, o quadrado inicial e o triângulo final teriam mesmos perímetro e área; analise a viabilidade dessa possibilidade à luz do exemplo 7.31.

37. Para a primeira parte, aplique a lei dos senos aos triângulos ABP, ACP e ABC, observando que sen $A\widehat{P}B =$ sen $A\widehat{P}C$.

38. Para o item (b), use (a) e o teorema 4.31. Para (a), comece mostrando que, se H e O denotam, respectivamente, o ortocentro e o circuncentro de ABC e se H_1 é o simétrico de H em relação a O, então $\overleftrightarrow{A_1H_1} \perp \overleftrightarrow{AH}$, $\overleftrightarrow{B_1H_1} \perp \overleftrightarrow{BH}$ e $\overleftrightarrow{C_1H_1} \perp \overleftrightarrow{CH}$. Em seguida, se AA' é diâmetro do círculo circunscrito a ABC, use o teorema da Mediana de Euler e a semelhança $AOM \sim AA'A_1$ para concluir que $\overline{A_1H_1} = 2(R + x)$, onde x é a distância de O ao lado BC. Calcule $\overline{B_1H_1}$ e $\overline{C_1H_1}$ de forma análoga, mostrando, em seguida, que

$$\begin{aligned} A(A_1B_1C_1) &= A(A_1B_1H_1) + A(A_1C_1H_1) + A(B_1C_1H_1) \\ &= 2R^2(\text{sen}\,\widehat{A} + \text{sen}\,\widehat{B} + \text{sen}\,\widehat{C}) \\ &\quad + 2(xy\text{sen}\,\widehat{C} + xz\text{sen}\,\widehat{B} + yz\text{sen}\,\widehat{A}) \\ &\quad + 2R((x+y)\text{sen}\,\widehat{C} + (x+z)\text{sen}\,\widehat{B} + (y+z)\text{sen}\,\widehat{A}). \end{aligned}$$

Finalmente, aplique a lei dos senos e o teorema de Carnot para concluir o resultado desejado.

Seção 7.4

1. No plano Cartesiano, se $A(-1,1)$, $B(1,-1)$, $C(-2,-2)$ e $P(x,y)$, então ABC é isósceles e queremos minimizar $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$. Para tanto, use o teorema de Steiner para calcular as coordenadas de P e, em seguida, o valor mínimo da expressão do enunciado.

Seção 8.1

2. Escreva $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$ e, em seguida, tome módulos em ambos os membros dessa igualdade para obter $|k| = \frac{||v||}{||w||}$.

4. Escreva a condição do enunciado como $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ e desenvolva.

5. Fixe um ponto O do plano e use o resultado do problema anterior para escrever $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$. Conclua, então, que $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$.

6. Sendo M o ponto médio de BC, use o fato de $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{OM}$ e $\overline{AH} = 2\overline{OM}$ (cf. teorema 4.19) para concluir que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$. Em seguida, escreva $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$ e aplique o resultado do problema 4 para concluir que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

7. Se P é o pé da bissetriz interna relativa a BC, use o teorema da Bissetriz Interna para concluir que $\overrightarrow{BP} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$. Em seguida, aplique o resultado do problema 4 para obter $\overrightarrow{OP} = \frac{b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{b+c}$. Por fim, repita o argumento acima para obter sucessivamente $\overrightarrow{AI} = \frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AP}$ e, por fim, a fórmula do enunciado.

8. Sendo O o centro do polígono, escreva $\overrightarrow{PA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OP}$ e use o fato de que $\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}$.

9. Fixado um ponto O do plano, sejam $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $\mathbf{m}_i = \overrightarrow{OM_i}$ e $\mathbf{b}_i = \overrightarrow{OB_i}$. Mostre que

$$\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_i = 2\mathbf{m}_i = \mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{a}_i;$$

em seguida, some o primeiro e o último membros da igualdade acima para $1 \le i \le 2n$, a fim de obter o resultado desejado.

10. Fixado arbitrariamente um ponto O do plano, sejam $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OA'} = \mathbf{a}'$ e analogamente para $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB'}$, etc. Use o problema 4 para obter $2\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{a}'$, $2\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{b}'$, $2\mathbf{d} - \mathbf{c} = \mathbf{c}'$ e $2\mathbf{a} - \mathbf{d} = \mathbf{d}'$. Por fim, encare essas quatro igualdades como um sistema linear de equações que, uma vez resolvido, fornece $\mathbf{a}$ em função de $\mathbf{a}'$ $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ e $\mathbf{d}'$.

11. Use argumentos semelhantes aos dos problemas anteriores para concluir que $Q_iQ_{i+1} = -\frac{1}{4}P_iP_{i+1}$, para $1 \leq i \leq 5$.

Seção 8.2

1. Use o resultado do problema 4, página 281.

2. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\overline{AD} = 1$. Escolhendo a origem de um sistema Cartesiano em D, temos então que $\overrightarrow{DC} = -\mathbf{i}$ e $\overrightarrow{DG} = -\sqrt{3}\mathbf{j}$. Aplique várias vezes o resultado do problema anterior para mostrar que $\overrightarrow{DL} = -(1+\sqrt{3})\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Por fim, obtenha e compare as expressões para os vetores $\overrightarrow{GC}$ e $\overrightarrow{GL}$ em termos dos vetores canônicos $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

4. Use o problema anterior, observando que, se $\overrightarrow{OQ}$ é obtido de $\overrightarrow{OP}$ pela rotação de ângulo trigonométrico $-\theta$, então as coordenadas de P no sistema $x'Oy'$ coincidem com as coordenadas de Q no sistema xOy.

5. Para o item (c), mostre que a rotação de coordenadas sugerida leva $\mathcal{C}$ a uma equação no sistema $x'Oy'$ da forma $a'(x')^2+2bx'y'+c'(y')^2+f' = 0$, com $2b' = 2b\cos 2\theta - (a-c)\text{sen}\, 2\theta$; mostre que tal equação admite uma solução θ quando $a \neq c$. Para (d), analise separadamente os casos $a'c' = 0$, $a'c' < 0$ e $a'c' > 0$, levando o sinal de f' em conta em cada um de tais casos.

6. Escolha um sistema Cartesiano tendo como origem o centro O de um dos hexágonos, e tal que um dos vértices do mesmo, digamos A, seja o ponto $(1,0)$. Mostre que o conjunto dos vértices dos hexágonos é o conjunto dos pontos P do plano tais que $\overrightarrow{OP} = a\mathbf{i} + b\mathbf{e}_{\frac{\pi}{3}}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Suponha, agora, que existe um quadrado $P_1P_2P_3P_4$ com todos os P_i's da forma acima; conclua que $\overrightarrow{P_2P_3}$ é obtido a partir de $\overrightarrow{P_1P_2}$ pela rotação trigonométrica de $\pm\frac{\pi}{2}$ e aplique o resultado do problema 1 para chegar a uma contradição.

Seção 8.3

4. Escolha um ponto arbitrário $Q(x,y)$ sobre r, tome um vetor unitário $\mathbf{v}$ normal a r e calcule o produto escalar $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v}$ de duas maneiras distintas.

5. Sendo $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$ e $\overrightarrow{OA_i} = \mathbf{a}_i$ para $1 \leq i \leq n$, mostre que
$$\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{a}_i - \mathbf{p}||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{a}_i||^2 - 2\mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i + n||\mathbf{p}||^2.$$
Em seguida, aplique o resultado da proposição 8.6.

6. Se O é o centro e R é o raio do círculo circunscrito ao polígono $A_1A_2\ldots A_{2n}$, temos
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \overline{A_{2k}P}^2 &= \sum_{k=1}^{n} ||\overrightarrow{A_{2k}P}||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_{2k}}||^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (||\overrightarrow{OP}||^2 + ||\overrightarrow{OA_{2k}}||^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA_{2k}}\rangle \\ &= n(\overline{OP}^2 + R^2) - 2\langle \overrightarrow{OP}, \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_{2k}}\rangle \\ &= n(\overline{OP}^2 + R^2),\end{aligned}$$
uma vez que $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_{2k}} = 0$ pela proposição 8.6 (já que $A_2A_4\ldots A_{2n}$ é um polígono regular). Analogamente, obtemos $\sum_{k=1}^{n} \overline{A_{2k-1}P}^2 = n(\overline{OP}^2 + R^2)$.

7. Faça o produto escalar de $\overrightarrow{OH}$ por si mesmo para obter
$$\overline{OH}^2 = \langle \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\rangle.$$
Em seguida, calcule cada um dos nove produtos do segundo membro acima. Para exemplificar, sendo $A\widehat{C}B = \widehat{C}$, note inicialmente que $A\widehat{O}B = 2\widehat{C}$ e, portanto,
$$\begin{aligned}2\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\rangle &= 2\overline{OA} \cdot \overline{OB}\cos 2\widehat{C} = 2R^2(1 - 2\text{sen}^2\widehat{C}) \\ &= 2R^2 - (2R\text{sen}\,\widehat{C})^2 = 2R^2 - a^2.\end{aligned}$$

8. Escreva $a+b+c=2p$ e use o problema 7, juntamente com a lei dos senos e as fórmulas (5.2) e (7.16), para concluir que

$$\begin{aligned} 4p^2\overline{OI}^2 &= 4p^2\|\overrightarrow{OI}\|^2 = \|a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\|^2 \\ &= R^2(a^2+b^2+c^2)+2abR^2(1-2\text{sen}^2\widehat{C})+ \\ &\quad +2acR^2(1-2\text{sen}^2\widehat{B})+2bcR^2(1-2\text{sen}^2\widehat{A}) \\ &= R^2(a+b+c)^2 \\ &\quad -ab(2R\text{sen}\,\widehat{C})^2-ac(2R\text{sen}\,\widehat{B})^2-bc(2R\text{sen}\,\widehat{A})^2 \\ &= 4p^2R^2-abc(a+b+c)=4p^2R^2-2pabc \\ &= 4p^2(R^2-2Rr). \end{aligned}$$

9. Mostre, com o auxílio das leis dos senos e cossenos, que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OE} &= \left(-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{1}{6}(b^2-c^2), \end{aligned}$$

onde $b=\overline{AC}$ e $c=\overline{AB}$.

10. Para o item (e), faça $q=2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}$ e observe que $0<q<1$, uma vez que $n>6$. Agora, use o resultado do problema 11 da seção 6.2 do volume 1 para obter $l_k=q^kl_0<\frac{ql_0}{q+k(1-q)}$ e, daí, que $l_k<1$ para $k>\frac{q(l_0-1)}{1-q}$. Por fim, observe que a distância entre dois pontos de coordenadas inteiras é sempre maior ou igual a 1, de forma que a discussão acima nos dá uma contradição.

Referências Bibliográficas

[1] AKOPYAN, A. V. e ZASLAVSKY A. A. (2007). *Geometry of Conics.* American Mathematical Society.

[2] DE BARROS, A. A. e ANDRADE, P. F. DE A. (2009). *Introdução à Geometria Projetiva.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[3] BARBOSA, J. L. M. (2004). *Geometria Euclidiana Plana.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[4] BARBOSA, J. L. M. (1995). *Geometria Hiperbólica.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[5] CAMINHA, A. (2012). *Temas de Matemática Elementar, Volume 1. Números Reais.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[6] COXETER, H. S. M. e GREITZER, S. L. (1967). *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America.

[7] DE FIGUEIREDO, D. G. (2002). *Números Irracionais e Transcendentes.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[8] HEATH, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Dover.

[9] HONSBERGER, R. (1976). *Mathematical Gems II.* The Mathematical Association of America.

[10] HONSBERGER, R. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.* The Mathematical Association of America.

[11] JOHNSON, R. (2007). *Advanced Euclidean Geometry.* Dover.

[12] LIMA, E. L. (1997). *Medida e Forma em Geometria.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[13] MOISE, E. E. (1963). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Addison-Wesley.

[14] J. Roberts. (1977). *Elementary Number Theory: a Problem Oriented Approach.* The MIT Press.

[15] YAGLOM, I. M. (1962). *Geometric Transformations I.* The Mathematical Association of America.

[16] YAGLOM, I. M. (1968). *Geometric Transformations II.* The Mathematical Association of America.

[17] YAGLOM, I. M. (1973). *Geometric Transformations III.* The Mathematical Association of America.

[18] YAGLOM, I. M. e SHENITZER, A. (2009). *Geometric Transformations IV.* The Mathematical Association of America.

Índice Remissivo

(*continuação dos títulos publicados*)

- *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6 - Polinômios* - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. Lages Lima, P. C. Pinto Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. Lages Lima

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - Ivan Niven

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribemboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - D. Pellegrino, E. Teixeira e G. Botelho

(continuação dos títulos publicados)

- *Fundamentos de Análise Funcional* - D. Pellegrino, E. Teixeira e G. Botelho

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1a a 8a* - E. Mega, R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9a a 16a* - C. Moreira, E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Shine